

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
1 Les ensembles de nombres . . . . .	1
1.0 Le programme . . . . .	1
1.1 Les différents types de nombres . . . . .	1
1.1.a Les entiers . . . . .	1
1.1.b Les décimaux, et les fractions décimales . . . . .	1
1.1.c Les nombres rationnels. . . . .	2
1.1.d Les nombres réels . . . . .	2
1.1.e Droite graduée . . . . .	2
1.1.f À retenir sur les ensembles de nombres . . . . .	3
1.2 Appartenir à un ensemble . . . . .	3
1.3 Encadrement et arrondi décimal d'un nombre réel. . . . .	4
1.4 Intervalles . . . . .	5
1.5 Valeur absolue et distance entre deux nombres . . . . .	5
1.6 Les capacités attendues du chapitre . . . . .	6
1.6.a Droite graduée . . . . .	6
1.6.b Représenter un intervalle . . . . .	6
1.6.c Appartenance à un intervalle . . . . .	6
1.6.d Encadrement d'un réel . . . . .	7
1.6.e Arrondi, chiffres significatifs . . . . .	7
2 Calcul numérique, littéral et équations . . . . .	8
2.1 Le programme . . . . .	8
2.2 Les puissances . . . . .	8
2.3 Les racines carrées . . . . .	8
2.4 Distributivité, développer . . . . .	9
2.5 Les identités remarquables . . . . .	10
2.6 Factoriser . . . . .	10
2.7 Équations du 1 <sup>er</sup> degré à une inconnue . . . . .	10
2.8 Équation-produit . . . . .	11
2.9 Équation $x^2 = a$ . . . . .	11
3 Fonctions et représentations graphiques . . . . .	12

3.0	Programme . . . . .	12
3.1	Notation pour définir une fonction . . . . .	12
3.2	Image et antécédent . . . . .	13
3.2.a	Par un calcul ou une équation . . . . .	13
3.2.b	Sur la représentation graphique . . . . .	13
3.2.c	Dans le tableau de valeurs . . . . .	13
3.3	Fonctions affines et linéaires . . . . .	14
3.3.a	Définition de fonction affine et exemples . . . . .	14
3.3.b	Fonctions linéaires . . . . .	14
3.3.c	Représentations graphiques des fonctions linéaires et affines . . . . .	14
3.4	Fonctions de références . . . . .	15
3.5	Appartenance d'un point à une courbe . . . . .	15
3.6	Résolution graphique d'équations $f(x) = k$ et d'inéquations $f(x) < k$ . . . . .	16
3.7	Résolution graphique d'inéquations $f(x) < g(x)$ . . . . .	17
3.8	Fonctions paires et impaires . . . . .	17
3.8.a	Fonction paire . . . . .	17
3.8.b	Fonction impaire . . . . .	17
4	Vecteurs . . . . .	18
4.0	Programme . . . . .	18
4.1	Translation et vecteurs . . . . .	18
4.2	Égalité de deux vecteurs . . . . .	19
4.3	Somme de deux vecteurs. . . . .	19
4.4	Produit d'un vecteur par un nombre réel. . . . .	20
5	Proportion et pourcentage . . . . .	21
5.0	Programme . . . . .	21
5.1	Effectifs, proportion et pourcentage . . . . .	21
5.2	Proportion de proportion . . . . .	22
6	Variations d'une fonction . . . . .	23
6.0	Programme . . . . .	23
6.1	Sens de variations d'une fonction . . . . .	23
6.2	Tableau de variations . . . . .	24
6.3	Minimum et maximum . . . . .	25
6.4	Variations d'une fonction affine . . . . .	26
6.4.a	Sens de variation d'une fonction affine. . . . .	26
6.4.b	Taux de variations . . . . .	26
6.4.c	Calculer une fonction affine . . . . .	27
6.5	Variations des fonctions carré, inverse, cube, racine carrée . . . . .	27
7	Arithmétique . . . . .	28
7.0	Programme . . . . .	28
7.1	Divisibilité . . . . .	28

	7.1.a	Définition et vocabulaire . . . . .	28
	7.1.b	Critères de divisibilité . . . . .	29
	7.1.c	Nombres pairs et impairs . . . . .	29
7.2		La division euclidienne . . . . .	29
	7.2.a	Propriété et exemples . . . . .	29
	7.2.b	Utilisation des calculatrices . . . . .	30
	7.2.c	Utilisation des logiciels et de python3 . . . . .	31
	7.2.d	Division euclidienne et divisibilité . . . . .	31
7.3		Méthodes de divisibilité . . . . .	31
7.4		Nombres premiers . . . . .	31
	7.4.a	Définition et propriétés . . . . .	31
	7.4.b	Décomposition en facteurs premiers . . . . .	32
7.5		Fraction irréductible . . . . .	32
8		Géométrie plane . . . . .	34
8.0		Programme . . . . .	34
8.1		Rappels de géométrie de collège . . . . .	34
	8.1.a	Angles . . . . .	34
	8.1.b	Cercle . . . . .	35
	8.1.c	Triangle isocèle . . . . .	35
	8.1.d	Parallélogramme . . . . .	35
	8.1.e	Calculs d'aires . . . . .	35
	8.1.f	Propriétés de Pythagore et de Thalès . . . . .	36
	8.1.g	Trigonométrie . . . . .	37
8.2		Une égalité entre sinus et cosinus . . . . .	38
8.3		Projeté orthogonal . . . . .	38
9		Inégalités et inéquations . . . . .	39
9.0		Programme . . . . .	39
9.1		Règles sur les inégalités . . . . .	39
9.2		Inéquation du premier degré . . . . .	40
9.3		Exemple de résolution d'un problème . . . . .	42
9.4		Signe de $ax + b$ . . . . .	43
9.5		Résoudre une inéquation produit . . . . .	44
10		Vecteurs et coordonnées . . . . .	45
10.0		Programme . . . . .	45
10.1		Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée . . . . .	46
10.2		Coordonnées de la somme de vecteurs . . . . .	46
10.3		Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel, colinéarité . . . . .	47
10.4		Calculer la norme d'un vecteur . . . . .	48
10.5		Coordonnées de points et de vecteurs . . . . .	48
10.6		Alignement et parallélisme . . . . .	49

10.7	Distance . . . . .	50
10.8	Coordonnées du milieu d'un segment . . . . .	50
11	Évolution . . . . .	51
11.0	Programme . . . . .	51
11.0.a	Collège . . . . .	51
11.0.b	Classe de seconde . . . . .	51
11.1	Vocabulaire . . . . .	51
11.2	Appliquer un taux d'évolution – Coefficient multiplicateur . . . . .	51
11.3	Évolution – Variation absolue et relative . . . . .	52
11.3.a	Variation absolue . . . . .	52
11.3.b	Variation relative . . . . .	53
11.4	Évolutions successives . . . . .	53
11.5	Évolution réciproque . . . . .	55
12	Droites du plan . . . . .	57
12.0	Programme . . . . .	57
12.1	Vecteur directeur d'une droite. . . . .	57
12.2	Équation cartésienne d'une droite . . . . .	58
12.3	Équation réduite d'une droite . . . . .	60
12.3.a	Définition, propriété, et tracé . . . . .	60
12.3.b	Équation réduite et équation cartésienne . . . . .	62
12.3.c	Parallèles et sécantes . . . . .	62
12.3.d	Déterminer une équation réduite de droite . . . . .	63
13	Statistiques . . . . .	65
13.0	Programme . . . . .	65
13.0.a	Collège . . . . .	65
13.0.b	Classe de seconde . . . . .	65
13.1	Série statistiques . . . . .	65
13.2	Moyenne et écart-type . . . . .	66
13.3	Linéarité de la moyenne . . . . .	68
13.4	Médiane, quartiles, écart interquartile . . . . .	68
14	Probabilités . . . . .	71
14.0	Programme . . . . .	71
14.1	Univers et événement . . . . .	71
14.2	Probabilité . . . . .	74
14.3	Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres . . . . .	75
15	Systèmes de deux équations à deux inconnues . . . . .	76
15.0	Programme . . . . .	76
15.1	Méthodes de résolution de systèmes du 1er degré à 2 inconnues . . . . .	76
15.2	Intersection de droites . . . . .	77
16	Échantillonnage . . . . .	79

16.0	Programme . . . . .	79
16.1	Échantillonnage et fluctuation d'échantillonnage . . . . .	79
16.1.a	Simuler une expérience aléatoire et un événement de probabilité $p$ . . . . .	80
16.1.b	Simuler la répétition d'une expérience aléatoire – Fluctuation d'échantillonnage . . . . .	81
16.1.c	Échantillon de grande taille – Loi des grands nombres . . . . .	82
16.1.d	Simuler un grand nombre d'échantillons . . . . .	83
16.2	Estimation d'une probabilité ou d'une proportion dans une population . . . . .	84

# 1 Les ensembles de nombres

## 1.0 Le programme

### Contenus

- Ensemble  $\mathbb{D}$  des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à  $10^{-n}$  près.
- Ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple  $\sqrt{2}$  et  $\pi$ .
- Notations  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$ .
- Ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels, droite numérique.
- Intervalles de  $\mathbb{R}$ . Notations  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- Notation  $|a|$ . Distance entre deux nombres réels.
- Représentation de l'intervalle  $[a - r ; a + r]$  puis caractérisation par la condition  $|x - a| \leq r$ .

### Capacités attendues

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

## 1.1 Les différents types de nombres

### 1.1.a Les entiers

Les premiers nombres que l'on apprend sont les nombres entiers positifs : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; etc. On les appelle aussi *les nombres entiers naturels*. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté  $\mathbb{N}$ .

On apprend les nombres négatifs au collège, par exemple  $-1 -2 -3$  ; etc. Les nombres entiers négatifs et positifs sont appelés les *entiers relatifs*, et l'ensemble des nombres entiers relatifs est noté  $\mathbb{Z}$ .

**Remarque :** l'ensemble des nombres entiers naturels est inclus dans l'ensemble des nombres entiers relatifs, on écrit :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

### 1.1.b Les décimaux, et les fractions décimales

À l'école primaire, on apprend les nombres décimaux et les fractions décimales.

Par exemple 1,6 est un nombre décimal et on sait que  $1,6 = 1 + \frac{6}{10} = \frac{16}{10}$ .

Les nombres décimaux peuvent être positifs ou négatifs, et on peut les placer sur une droite graduée. L'ensemble des nombres décimaux négatifs et positifs est noté  $\mathbb{D}$ .

**Remarque :**

- On peut toujours écrire un entier sous forme de décimal ou de fraction décimale, par exemple :  
 $-5 = -5,0 = -\frac{50}{10}$  ou  $17 = 17,0 = \frac{170}{10}$
- Donc l'ensemble des nombres entiers relatifs est inclus dans l'ensemble des décimaux, et on a donc :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ .

## 1.1.c Les nombres rationnels.

## Qu'appelle-t-on un nombre rationnel ?

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction, par exemple  $\frac{2}{3}$  ou  $-\frac{1}{2}$ .

Pourquoi ne pas dire tout simplement « fraction » au lieu de « nombre rationnel » ?

Parce qu'on peut avoir plusieurs fractions qui sont égales et qui représentent le même nombre rationnel, par exemple :  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{20}{30}$  donc les fractions  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{4}{6}$ ;  $\frac{6}{9}$ ;  $\frac{20}{30}$  représentent le même nombre rationnel.

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$ .

## Les entiers relatifs sont-ils des rationnels ?

Oui, parce qu'on peut toujours écrire un entier relatif sous forme de fraction, par exemple :  $-4 = -\frac{4}{1}$  ou  $9 = \frac{9}{1}$ .

## Les décimaux sont-ils des rationnels ?

Oui, parce qu'on a vu plus haut qu'on peut toujours écrire un décimal sous forme de fraction décimale. Donc l'ensemble des nombres décimaux est inclus dans l'ensemble des rationnels et on a maintenant :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

## Les rationnels sont-ils tous des décimaux ?

Non, certains rationnels ne sont pas décimaux, par exemple  $\frac{1}{3}$  n'est pas un décimal.

En effet, quand on saisit à la calculatrice  $\boxed{1} \boxed{\div} \boxed{3}$ , on obtient :  $\frac{1}{3} \approx 0,33333333$ , ce qui signifie que  $\frac{1}{3}$  est environ égal à 0,33333333 mais  $\frac{1}{3}$  n'est pas égal à 0,33333333 parce que  $3 \times \frac{1}{3} = 1$  alors que  $3 \times 0,33333333 = 0,99999999 \neq 1$ .

En fait, on ne peut pas trouver de nombre décimal égal à  $\frac{1}{3}$ , donc  $\frac{1}{3}$  est un exemple de nombre rationnel qui n'est pas décimal.

## 1.1.d Les nombres réels

On a cru que tous les nombres étaient rationnels et, plusieurs siècles avant Jésus-Christ, on s'est rendu compte qu'on ne pouvait pas écrire  $\sqrt{2}$  sous forme de fraction, c'est à dire que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel.

Un autre exemple de nombre qui ne peut pas s'écrire sous forme de fraction est le nombre  $\pi$ .

L'ensemble des nombres rationnels et non rationnels est appelé l'ensemble des réels et on le note  $\mathbb{R}$ .

## 1.1.e Droite graduée

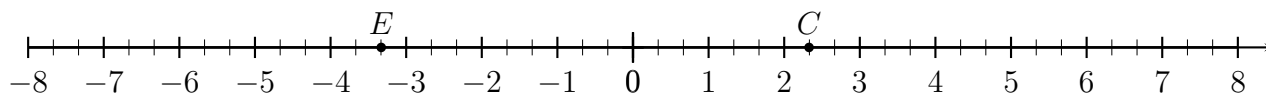
## Exemple 1.1

Sur la droite graduée, le nombre  $-4$  est associé au point  $A$ , et le nombre  $3,7$  est associé au point  $B$ .



**Exemple 1.2**

Sur la droite graduée, le nombre  $\frac{7}{3}$  est associé au point  $C$ , et le nombre  $-\frac{10}{3}$  est associé au point  $E$ .

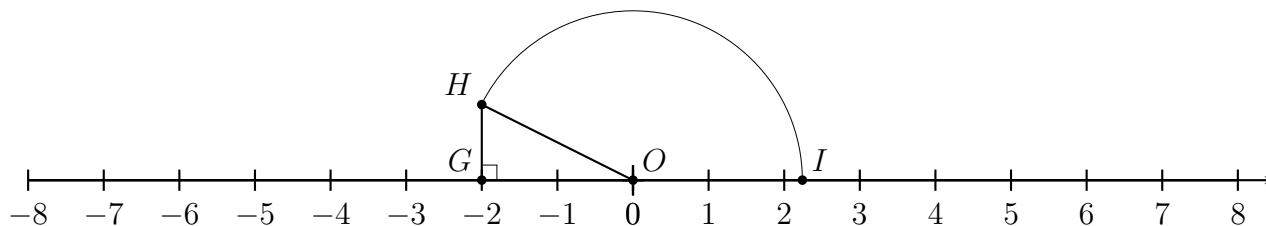
**Exemple 1.3**

$OGH$  est un triangle rectangle en  $G$  tel que  $OG = 2$  et  $GH = 1$ .

Donc, d'après le théorème de Pythagore,  $OH^2 = OG^2 + GH^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ .

Par conséquent,  $OH = \sqrt{5}$ , donc  $OI = \sqrt{5}$ .

Ainsi, sur la droite graduée, le nombre  $\sqrt{5}$  est associé au point  $I$ .

**1.1.f À retenir sur les ensembles de nombres****Définition 1.1**

- L'ensemble des nombres entiers naturels, c'est à dire l'ensemble des entiers positifs est noté  $\mathbb{N}$ .
- L'ensemble des nombres entiers négatifs et positifs est noté  $\mathbb{Z}$ .
- L'ensemble des nombres décimaux négatifs et positifs est noté  $\mathbb{D}$ .
- L'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction, est noté  $\mathbb{Q}$ .
- L'ensemble des nombres réels, c'est à dire l'ensemble des nombres rationnels et non rationnels, est noté  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 1.1**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

**Propriété 1.2**

- Tout nombre réel est associé à un point d'une droite graduée.
- Tout point d'une droite graduée est associé à un nombre réel.

**1.2 Appartenir à un ensemble**

Dans les paragraphes précédents, nous venons d'étudier des ensembles de nombres.

Par exemple 7 est un entier naturel, on dit que 7 *appartient* à l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels et on écrit  $7 \in \mathbb{N}$ .

Autre exemple : 7,2 n'est pas un entier naturel, on dit que 7,2 *n'appartient pas* à l'ensemble  $\mathbb{N}$  et on écrit  $7,2 \notin \mathbb{N}$ .

Le fait d'appartenir à un ensemble ne concerne pas que les nombres, puisqu'on dit aussi par exemple qu'un point *appartient* à une droite ou qu'un point *n'appartient pas* à une droite.



### 1.3 Encadrement et arrondi décimal d'un nombre réel.

#### Unité, dixième, centième, etc.

On encadre ou on arrondit un nombre, à l'unité, au dixième, au centième, etc.

Dressons d'abord le tableau ci-dessous pour rappeler ce que ça veut dire.

	Arrondir	Nombre de chiffres après la virgule
$1 = 10^0$	à l'unité près	0 chiffre
$\frac{1}{10} = 0,1 = 10^{-1}$	au dixième près ou à $10^{-1}$ près	1 chiffre
$\frac{1}{100} = 0,01 = 10^{-2}$	au centième près ou à $10^{-2}$ près	2 chiffres
$\frac{1}{1000} = 0,001 = 10^{-3}$	au millième près ou à $10^{-3}$ près	3 chiffres

#### Amplitude

La précision de l'encadrement est aussi appelé l'amplitude :

- un encadrement à l'unité près a une amplitude de 1 ;
- un encadrement au dixième près a une amplitude de  $\frac{1}{10}$  ;
- un encadrement au centième près a une amplitude de  $\frac{1}{100}$ .

#### Exemple 1.4

Encadrement du nombre réel  $\sqrt{3}$ .

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

Encadrement de  $\sqrt{3}$  à l'unité près :  $1 < \sqrt{3} < 2$

Encadrement de  $\sqrt{3}$  au dixième près :  $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

Encadrement de  $\sqrt{3}$  au centième près :  $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

#### Propriété 1.3 (Règle d'arrondi)

Si on veut arrondir un nombre décimal à  $n$  chiffres après la virgule, on regarde le chiffre suivant :

- si ce chiffre est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 on arrondit en dessous ;
- si ce chiffre est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 on arrondit au dessus.

#### Exemple 1.5

- Arrondir 6,2375 à l'unité près

Le chiffre des unités est 6, le suivant est 2, donc on arrondit en dessous :  $6,2375 \approx \boxed{6}$ .

En fait, on a :  $6 < 6,2375 < 7$  et on arrondit à 6 parce que 6,2375 est plus proche de 6 que de 7.

- Arrondir 6,2375 au centième près

Le chiffre des dixième est 3, le suivant est 7, donc on arrondit au dessus :  $6,2375 \approx \boxed{6,24}$ .

En fait, on a :  $6,23 < 6,2375 < 6,24$  et on arrondit à 6,24 parce que 6,2375 est plus proche de 6,24 que de 6,23.

- Arrondir 6,2375 au millième près

Le chiffre des millièmes est 7, le suivant est 5, donc on arrondit au dessus :  $6,2375 \approx \boxed{6,238}$ .

Ici, on a :  $6,237 < 6,2375 < 6,238$  mais dans ce cas 6,2375 est aussi proche de 6,237 que de 6,238 et par convention, on arrondit au dessus.

## 1.4 Intervalles

### Définition 1.2 (Intervalle)

- L'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $a \leq x \leq b$  est l'intervalle  $[a ; b]$ .
- L'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $a < x < b$  est l'intervalle  $]a ; b[$ .
- L'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $a \leq x < b$  est l'intervalle  $[a ; b[$ .
- L'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $a < x \leq b$  est l'intervalle  $]a ; b]$ .

**Vocabulaire :** dans la définition ci-dessus, les nombres  $a$  et  $b$  sont appelés les *bornes* de l'intervalle.

Un intervalle peut aussi être un ensemble de nombres réels inférieurs à un nombre ou supérieurs à un nombre.

Par exemple, pour l'ensemble des nombres supérieurs à 7, on considère que c'est l'ensemble des nombres compris entre 7 et « plus l'infini »  $(+\infty)$  et on écrit cet intervalle  $]7 ; +\infty[$ .

### Définition 1.3 (Intervalle avec borne infinie)

- L'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $x \geq a$  est l'intervalle  $[a ; +\infty[$ .
- L'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $x > a$  est l'intervalle  $]a ; +\infty[$ .
- L'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $x \leq b$  est l'intervalle  $] - \infty ; b]$ .
- L'ensemble des nombres réels  $x$  tels que  $x < b$  est l'intervalle  $] - \infty ; b[$ .
- L'ensemble  $\mathbb{R}$  est l'intervalle  $] - \infty ; +\infty[$ .

## 1.5 Valeur absolue et distance entre deux nombres

### Définition 1.4 (Valeur absolue)

- Si  $a$  est un nombre positif ou nul, la valeur absolue de  $a$  est  $a$
- Si  $a$  est un nombre négatif la valeur absolue de  $a$  est  $-a$
- La valeur absolue de  $a$  s'écrit  $|a|$ .

### Exemple 1.6

- 5,8 est positif, donc sa valeur absolue est 5,8 :  $|5,8| = 5,8$
- -4 est négatif, donc sa valeur absolue est  $-(-4) = 4$  :  $|-4| = 4$

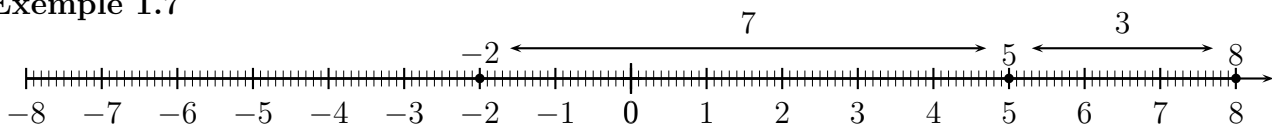
### Remarques

- La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.
- Sur les calculatrices, dans un tableur, ou dans les langages de programmation, on obtient la valeur absolue avec la commande `abs`.

### Propriété 1.4 (Distance entre deux nombres)

La distance entre deux nombres  $a$  et  $b$  est  $|b - a|$ .

### Exemple 1.7



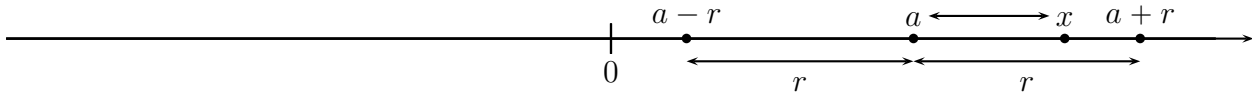
- La distance entre -2 et 5 est 7, en effet :  $|-2 - 5| = |-7| = 7$  ou  $|5 - (-2)| = |5 + 2| = |7| = 7$
- La distance entre 5 et 8 est 3, en effet :  $|5 - 8| = |-3| = 3$  ou  $|8 - 5| = |3| = 3$

**Propriété 1.5**

On considère des nombres  $a$ ,  $x$  et  $r$  un nombre strictement positif.  
 Dire que  $x$  est dans l'intervalle  $[a - r ; a + r]$  équivaut à  $|x - a| \leq r$ .

**Explication et schéma**

La propriété ci-dessus signifie que dire que  $x$  est dans l'intervalle  $[a - r ; a + r]$  revient à dire que la distance entre  $a$  et  $x$  est inférieure ou égale à  $r$ .



**Démonstration**

$$\begin{aligned}
 x \in [a - r ; a + r] &\iff a - r \leq x \leq a + r \\
 &\iff -r \leq x - a \leq +r \\
 &\iff |x - a| \leq r
 \end{aligned}$$

**1.6 Les capacités attendues du chapitre**

**1.6.a Droite graduée**

**Capacité attendue :** associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.

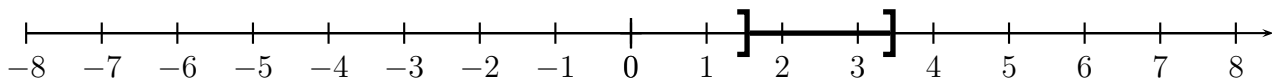
Voir les exemples 1.1, 1.2, 1.3.

**1.6.b Représenter un intervalle**

**Capacité attendue :** représenter un intervalle de la droite numérique.

**Exemple 1.8**

L'intervalle  $]1,5 ; 3,5]$  est l'ensemble de tous les nombres réels  $x$  tels que :  $1,5 < x \leq 3,5$ , et il est représenté ci-dessous.



**1.6.c Appartenance à un intervalle**

**Capacité attendue :** déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.

**Exemple 1.9**

Les nombres ci-dessous appartiennent-ils à l'intervalle  $[-3 ; 5[$  ?

$$-3,1 \quad 4,6 \quad 5 \quad -3 \quad \sqrt{26} \quad -\frac{20}{7}$$

$-3,1 < -3$  donc  $-3,1 \notin [-3 ; 5[$

$-3 \leq 4,6 < 5$  donc  $4,6 \in [-3 ; 5[$

$-3 \in [-3 ; 5[$  parce que  $-3 \leq -3 < 5$ .

$5 \notin [-3 ; 5[$

$$-3 = -\frac{3}{1} = -\frac{3 \times 7}{1 \times 7} = -\frac{21}{7} \text{ donc } -3 \leq -\frac{20}{7}$$

et comme  $-\frac{20}{7}$  est négatif, il est inférieur à 5, donc  $-3 \leq -\frac{20}{7} < 5$ , donc  $-\frac{20}{7} \in [-3 ; 5[$ .

$\sqrt{26} \approx 5,099$ , donc  $\sqrt{26} > 5$ , donc  $\sqrt{26} \notin [-3 ; 5[$ .

**1.6.d Encadrement d'un réel**

**Capacité attendue :** donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.

Voir l'exemple 1.4

**1.6.e Arrondi, chiffres significatifs**

**Capacité attendue :** dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Voir l'exemple 1.5 qui donne les arrondis d'un nombre à l'unité, au centième et au millième.

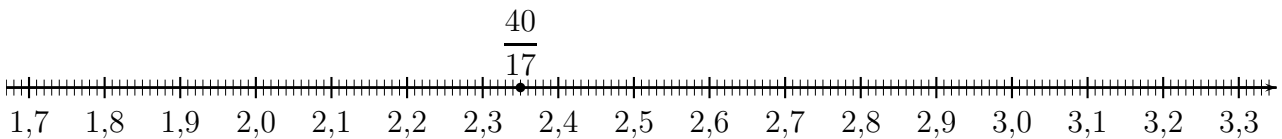
Mais la capacité attendue ci-dessus précise d'arrondir *en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée*. Cela signifie qu'il faut savoir choisir selon la situation si on arrondit à l'unité, au dixième, au centième, etc. Voir l'exemple ci-dessous.

**Exemple 1.10**

Placer  $\frac{40}{17}$  sur la droite graduée ci-dessous.

Avec la calculatrice, on obtient :  $\frac{40}{17} \approx 2,352941$ .

Sur la droite graduée ci-dessous, les graduations les plus petites sont des centièmes, donc, on arrondit  $\frac{40}{17}$  au centième près. Dans le résultat de la calculatrice, le chiffre des centièmes est 5, le suivant est 2, donc d'après la règle d'arrondi (propriété 1.3), on arrondit en dessous  $\frac{40}{17} \approx 2,35$ .



## 2 Calcul numérique, littéral et équations

### 2.1 Le programme

#### Contenus

- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. Relation  $\sqrt{a^2} = |a|$
- Identités  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ,  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  et  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , à savoir utiliser dans les deux sens.

#### Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- savoir résoudre une équation du premier degré à une inconnue
- savoir résoudre une équation produit

#### Exemple d'algorithme

Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.

### 2.2 Les puissances

#### Définition 2.1 (Puissance d'exposant entier positif)

Pour un nombre réel  $a$  on a les égalités :

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad \text{et pour un nombre entier naturel } n \geq 2, \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

L'expression  $a^n$  se lit «  $a$  puissance  $n$  » et le nombre  $n$  s'appelle l'exposant.

#### Définition 2.2 (Puissance d'exposant entier négatif)

Pour un nombre réel  $a$  et un nombre entier naturel  $n$ , on a l'égalité :  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

#### Propriété 2.1 (Notation scientifique d'un nombre décimal)

Tout nombre décimal  $d$  peut s'écrire sous la forme  $d = a \times 10^n$

où  $n$  est un entier et  $a$  est un nombre décimal tel que  $1 \leq a < 10$ .

L'expression  $a \times 10^n$  s'appelle la notation scientifique de  $d$ .

#### Propriété 2.2 (Règles de calculs sur les puissances)

Pour deux réels  $a$  et  $b$  et pour deux entiers  $n$  et  $p$ , on a les égalités

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad (a^n)^p = a^{n \times p} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

### 2.3 Les racines carrées

#### Définition 2.3 (Racine carrée)

Pour un nombre réel positif  $a$ , le nombre positif dont le carré est égal à  $a$ , est la racine carrée de  $a$  et se note  $\sqrt{a}$ .

**Propriété 2.3**

Pour deux réels  $a$  et  $b$  positifs, on a les égalités suivantes :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et, si } b \neq 0 \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**Exemple 2.1**

$$\sqrt{10} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} \quad \sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21} \quad \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}} \quad \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{13}{8}}$$

**Exemple 2.2**

Écrivons sous la forme d'un entier les deux expressions  $\sqrt{2} \times \sqrt{5\,000}$  et  $\frac{\sqrt{810}}{\sqrt{10}}$ .

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5\,000} = \sqrt{2 \times 5\,000} = \sqrt{10\,000} = \boxed{100} \quad \frac{\sqrt{810}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{810}{10}} = \sqrt{81} = \boxed{9}$$

**Exemple 2.3**

Écrivons  $\sqrt{32}$  sous la forme  $a\sqrt{b}$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres entiers positifs et  $b$  le plus petit possible.

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}}$$

On pourrait aussi effectuer le calcul ainsi :  $\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{4} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$ . On arrive bien à une expression de la forme  $a\sqrt{b}$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres entiers positifs, mais  $b$  n'est pas le plus petit possible puisque dans  $4\sqrt{2}$ , on a  $b = 2$ , et dans  $2\sqrt{8}$ , on a  $b = 8$ .

**2.4 Distributivité, développer**

**Propriété 2.4 (Distributivité)**

La multiplication est distributive par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction, et pour des nombres  $k, a, b, c, d$ , on a les égalités suivantes :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \quad k \times (a - b) = k \times a - k \times b \quad (a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

**Exemple 2.4 (Développement et calcul numérique (1))**

$$50 \times 102 = 50 \times (100 + 2) = 50 \times 100 + 50 \times 2 = 5\,000 + 100 = \boxed{5\,100}$$

**Exemple 2.5 (Développement et calcul numérique (2))**

$$21 \times 31 = (20 + 1) \times (30 + 1) = 20 \times 30 + 20 \times 1 + 1 \times 30 + 1 \times 1 = 600 + 20 + 30 + 1 = \boxed{651}$$

**Exemple 2.6 (Développement et calcul numérique (3))**

$$49 \times 41 = (50 - 1) \times (40 + 1) = 50 \times 40 + 50 \times 1 - 1 \times 40 - 1 \times 1 = 2\,000 + 50 - 40 - 1 = \boxed{2\,009}$$

**Exemple 2.7 (Développement et calcul littéral (1))**

$$x \times (x + 6) = x \times x + x \times 6 = \boxed{x^2 + 6x}$$

**Exemple 2.8 (Développement et calcul littéral (2))**

$$(x + 2) \times (x + 3) = x \times x + x \times 3 + 2 \times x + 2 \times 3 = x^2 + 3x + 2x + 6 = \boxed{x^2 + 5x + 6}$$

**Exemple 2.9 (Développement et calcul littéral (3))**

$$(x - 1) \times (x - 5) = x \times x - x \times 5 - 1 \times x + 1 \times 5 = x^2 - 5x - x + 5 = \boxed{x^2 - 6x + 5}$$

## 2.5 Les identités remarquables

### Propriété 2.5

Pour des nombres  $a$  et  $b$  on a les égalités suivantes :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

### Exemple 2.10 (Identité remarquable et calcul numérique (1))

$$99 \times 101 = (100 - 1) \times (100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 10\,000 - 1 = 9\,999$$

### Exemple 2.11 (Identité remarquable et calcul littéral (1))

$$(x - 2) \times (x + 2) = x^2 - 2^2 = \boxed{x^2 - 4}$$

### Exemple 2.12 (Identité remarquable et calcul numérique (2))

$$201^2 = (200 + 1)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times 1 + 1^2 = 40\,000 + 400 + 1 = \boxed{40\,401}$$

### Exemple 2.13 (Identité remarquable et calcul numérique (3))

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = \boxed{9\,801}$$

### Exemple 2.14 (Identité remarquable et calcul littéral (2))

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = \boxed{x^2 + 6x + 9}$$

### Exemple 2.15 (Identité remarquable et calcul littéral (3))

$$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = \boxed{x^2 - 10x + 25}$$

## 2.6 Factoriser

### Exemple 2.16 (Factorisation avec facteur commun (1))

$$x^2 + 5x = x \times x + 5 \times x = x \times x + x \times 5 = \boxed{x \times (x + 5)}$$

### Exemple 2.17 (Factorisation avec facteur commun (2))

$$6x + 4 = 2 \times 3x + 2 \times 2 = \boxed{2 \times (3x + 2)}$$

### Exemple 2.18 (Factorisation avec une identité remarquable (1))

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = \boxed{(x - 3) \times (x + 3)}$$

### Exemple 2.19 (Factorisation avec une identité remarquable (2))

$$(x + 6)^2 - 16 = (x + 6)^2 - 4^2 = (x + 6 - 4) \times (x + 6 + 4) = \boxed{(x + 2) \times (x + 10)}$$

## 2.7 Équations du 1<sup>er</sup> degré à une inconnue

### Exemple 2.20

Résolvons les équations  $x + 4 = 25$  et  $5x = 35$

$$x + 4 = 25 \iff x + 4 - 4 = 25 - 4 \iff x = \boxed{21}$$

$$5x = 35 \iff \frac{5x}{5} = \frac{35}{5} \iff x = \boxed{7}$$

**Exemple 2.21**

$$\begin{aligned}
 3x - 7 = 15 &\iff 3x - 7 + 7 = 15 + 7 \\
 &\iff 3x = 22 \\
 &\iff \frac{3x}{3} = \frac{22}{3} \\
 &\iff \boxed{x = \frac{22}{3}}
 \end{aligned}$$

**Exemple 2.22**

$$\begin{aligned}
 5x + 6 = 12x - 9 &\iff 5x - 12x = -9 - 6 \\
 &\iff -7x = -15 \\
 &\iff x = \frac{-15}{-7} \\
 &\iff x = \boxed{\frac{15}{7}}
 \end{aligned}$$

## 2.8 Équation-produit

**Propriété 2.6 (Annulation d'un produit)**

Si un produit est nul, alors l'un des facteurs (au moins) est nul.  
 Autrement dit : si  $A \times B = 0$  alors  $A = 0$  ou  $B = 0$

**Exemple 2.23 (Équation-produit)**

$$\begin{aligned}
 (x - 4)(3x - 5) = 0 &\iff x - 4 = 0 \text{ ou } 3x - 5 = 0 \\
 &\iff x = 4 \qquad 3x = 5 \\
 &\qquad\qquad\qquad x = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

Donc :  $\boxed{x = 4 \text{ ou } x = \frac{5}{3}}$

## 2.9 Équation $x^2 = a$

**Exemple 2.24**

Résolvons les équations :  $x^2 = 4$  ;  $x^2 = 7$  ;  $x^2 = 0$  ;  $x^2 = -6$ .

$$x^2 = 4 \iff \boxed{x = -2 \text{ ou } x = 2} \qquad x^2 = 7 \iff \boxed{x = -\sqrt{7} \text{ ou } x = \sqrt{7}} \qquad x^2 = 0 \iff \boxed{x = 0}$$

$x^2$  est positif, donc  $\boxed{\text{l'équation } x^2 = -6 \text{ n'a pas de solution}}$ .



## 3 Fonctions et représentations graphiques

### 3.0 Programme

#### Contenus

- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de  $\mathbb{R}$ .
- Courbe représentative : la courbe d'équation  $y = f(x)$  est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient  $y = f(x)$ .
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.
- Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.

#### Capacités attendues

- Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.
- Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple  $U = RI$ ,  $d = vt$ ,  $S = \pi r^2$ ,  $V = abc$ ,  $V = \pi r^2 h$ ), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré  $ax + by = c$ .
- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Exploiter l'équation  $y = f(x)$  d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type  $f(x) = k$ ,  $f(x) < k$ .
- Résoudre une équation ou une inéquation du type  $f(x) = k$ ,  $f(x) < k$ , en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique (*équation seulement*), logicielle.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type  $f(x) = g(x)$ ,  $f(x) < g(x)$ .

#### Approfondissements possibles

Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.

### 3.1 Notation pour définir une fonction

#### Exemple 3.1

Pour définir une fonction dans un énoncé,

- la phrase « la fonction  $f$  est définie par  $f(x) = 4x + 6$  »
- et l'expression « la fonction  $f : x \mapsto 4x + 6$  »

signifient la même chose.

#### Exemple 3.2

Si l'on voit dans un énoncé, l'expression « la fonction  $g : x \mapsto x^2 + 7x$  », cela signifie que la fonction  $g$  est définie par  $g(x) = x^2 + 7x$ .

### 3.2 Image et antécédent

#### 3.2.a Par un calcul ou une équation

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction  $f$ , on remplace  $x$  par sa valeur dans l'expression  $f(x)$ . Le résultat est l'image de ce nombre.

Pour calculer le ou les éventuels antécédents d'un nombre  $k$  par une fonction  $f$ , on résout l'équation  $f(x) = k$ .

#### Exemple 3.3 (Calculer une image)

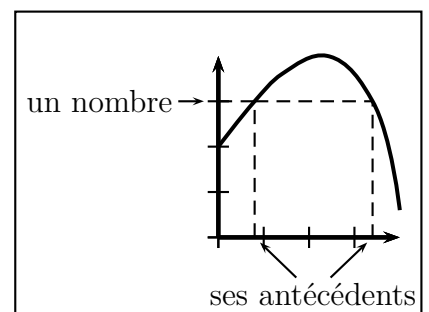
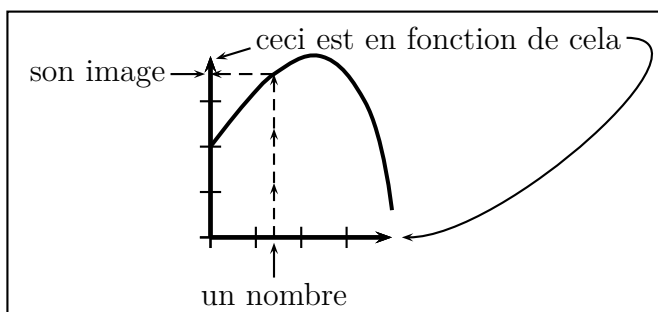
- La fonction  $f$  est définie par  $f(x) = 4x + 6$ . Calculons l'image de 3 :  
 $f(3) = 4 \times 3 + 6 = 12 + 6 = 18$ . L'image de 3 par la fonction  $f$  est 18.
- Calculons l'image de 5 par la fonction  $g : x \mapsto x^2 + 7x$   
 $g(5) = 5^2 + 7 \times 5 = 25 + 35 = 60$ . L'image de 5 par la fonction  $g$  est 60.

#### Exemple 3.4 (Calculer un antécédent)

- La fonction  $f$  est définie par  $f(x) = 9x - 2$ . Calculons l'antécédent de 70 :  
 $f(x) = 70 \iff 9x - 2 = 70 \iff 9x - 2 + 2 = 70 + 2 \iff 9x = 72 \iff x = \frac{72}{9} \iff x = 8$   
 L'antécédent de 70 par la fonction  $f$  est 8.
- Calculons l'image de 6 par la fonction  $g : x \mapsto 3x + 1$   
 $g(x) = 6 \iff 3x + 1 = 6 \iff 3x + 1 - 1 = 6 - 1 \iff 3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}$   
 L'antécédent de 6 par la fonction  $g$  est  $\frac{5}{3}$ .

#### 3.2.b Sur la représentation graphique

Voici un schéma pour résumer où se trouve les images et les antécédents sur la représentation graphique, et pour indiquer ce qui est en fonction de quoi.



#### 3.2.c Dans le tableau de valeurs

Voici un schéma pour résumer où se trouve les images et les antécédents dans un tableau de valeurs, et pour indiquer ce qui est en fonction de quoi.

$x$	...	un nombre $a$	...	un antécédent de $b$	...
$f(x)$	...	l'image de $a$	...	un nombre $b$	...

ceci en fonction de cela

### 3.3 Fonctions affines et linéaires

#### 3.3.a Définition de fonction affine et exemples

##### Définition 3.1

Une fonction affine est une fonction définie sous la forme  $f(x) = ax + b$ .  
 Le nombre  $a$  s'appelle le coefficient directeur.  
 Le nombre  $b$  s'appelle l'ordonnée à l'origine.

##### Exemple 3.5

Les fonctions définies par  $f_1(x) = 2x - 6,5$  et  $f_2(x) = -1,3x + 7$  sont des fonctions affines.

#### 3.3.b Fonctions linéaires

##### Définition 3.2

Une fonction linéaire est une fonction définie sous la forme  $f(x) = ax$ .

Dans l'égalité  $f(x) = ax + b$ , si  $b = 0$  on obtient  $f(x) = ax$ , donc :

##### Propriété 3.1

Les fonctions linéaires font partie des fonctions affines.

##### Exemple 3.6

Les fonctions définies par  $g_1(x) = 0,07x$  et  $g_2(x) = -3x$  sont des fonctions linéaires, mais ce sont aussi des fonctions affines.

##### Propriété 3.2

Un tableau de valeurs d'une fonction linéaire de coefficient directeur  $a$  est un tableau de proportionnalité et son coefficient est le nombre  $a$ .

##### Exemple 3.7

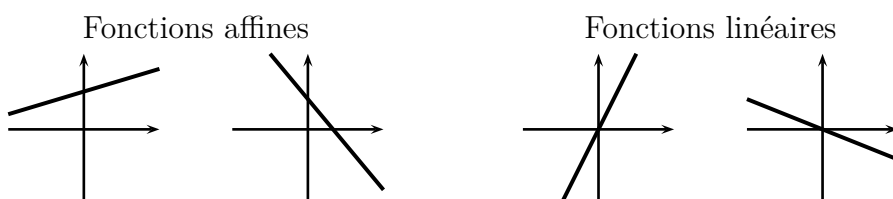
Par exemple pour la fonction définie par  $f(x) = 0,07x$  le coefficient de proportionnalité du tableau de valeurs est 0,07.

#### 3.3.c Représentations graphiques des fonctions linéaires et affines

##### Propriété 3.3

- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

##### Exemple 3.8

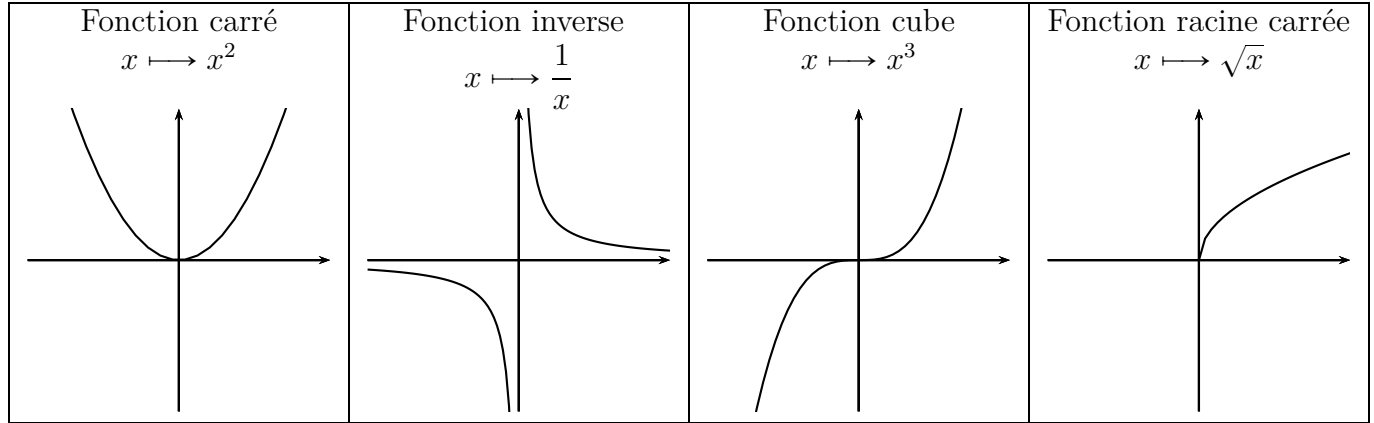


### 3.4 Fonctions de références

#### Définition 3.3

En seconde, les fonctions de références sont :

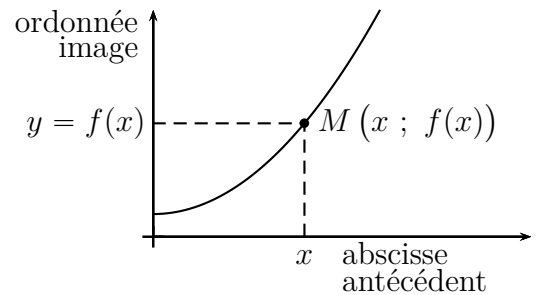
- les fonctions affines et linéaires (paragraphe précédent) ;
- les fonctions carré, inverse, cube, racine carrée (page suivante).



### 3.5 Appartenance d'un point à une courbe

#### Propriété 3.4

Dans un repère du plan, un point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  appartient à la courbe qui représente une fonction  $f$ , si et seulement si  $y = f(x)$ . Ainsi, l'image de  $x$  est  $y$ , et l'antécédent de  $y$  est  $x$ .



#### Exemple 3.9

La fonction  $f$  est définie par  $f(x) = 2x - 5$  et elle est représentée ci-contre par la droite  $\mathcal{D}_f$ .

- Plaçons le point  $A$  d'abscisse 6 sur la droite  $\mathcal{D}_f$ , et calculons son ordonnée.

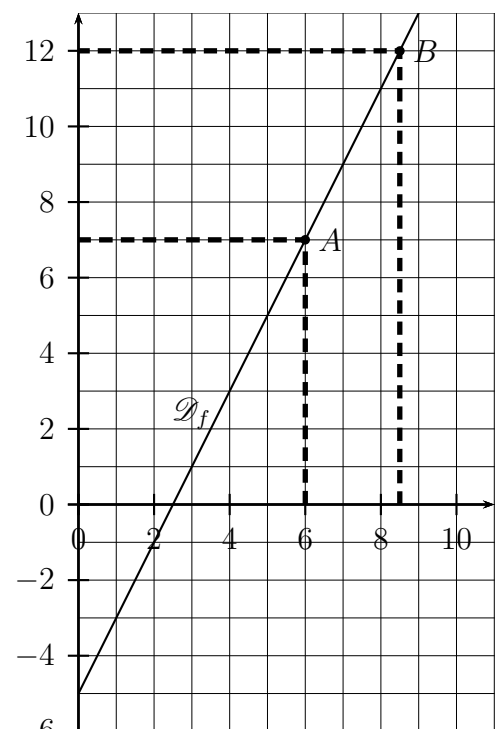
L'abscisse de  $A$  est  $x = 6$ , et on calcule son ordonnée :  $y = 2 \times 6 - 5 = \boxed{7}$ . Cela revient à calculer l'image de 6.

- Plaçons le point  $B$  d'ordonnée 12 sur la droite  $\mathcal{D}_f$ , et calculons son abscisse.

L'ordonnée de  $B$  est  $y = 12$ , et on calcule son abscisse. On sait que  $f(x) = y$ , donc :

$$\begin{aligned}
 f(x) = 12 &\iff 2x - 5 = 12 \\
 &\iff 2x - 5 + 5 = 12 + 5 \\
 &\iff 2x = 17 \\
 &\iff x = \frac{17}{2} = \boxed{8,5}
 \end{aligned}$$

Cela revient à calculer l'antécédent de 12.



**Propriété 3.5**

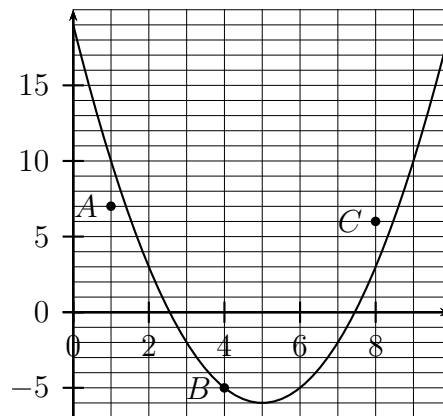
Pour une fonction  $f$  représentée par une courbe  $\mathcal{C}_f$ , et pour un point  $M$  de coordonnées  $(x_M ; y_M)$ .

- Si  $y_M < f(x_M)$ , le point  $M$  est en dessous de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- Si  $y_M = f(x_M)$ , le point  $M$  est sur la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- Si  $y_M > f(x_M)$ , le point  $M$  est au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Exemple 3.10**

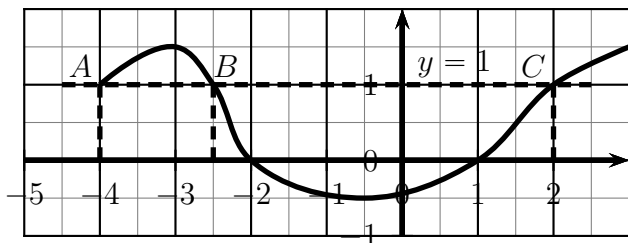
On considère la fonction  $f : x \mapsto x^2 - 10x + 19$  qui est représentée par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , et les points  $A, B, C$ , de coordonnées :  $A(1 ; 7) \quad B(4 ; -5) \quad C(8 ; 6)$

- Point  $A$  :  $f(x_A) = f(1) = 1^2 - 10 \times 1 + 19 = 10$   
et  $y_A = 7$ , donc  $y_A < f(x_A)$ ,  
donc le point  $A$  est en dessous de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- Point  $B$  :  $f(x_B) = f(4) = 4^2 - 10 \times 4 + 19 = -5$   
et  $y_B = -5$ , donc  $y_B = f(x_B)$ ,  
donc le point  $B$  est sur la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- Point  $C$  :  $f(x_C) = f(8) = 8^2 - 10 \times 8 + 19 = 3$   
et  $y_C = 6$ , donc  $y_C > f(x_C)$ ,  
donc le point  $C$  est au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .



**3.6 Résolution graphique d'équations  $f(x) = k$  et d'inéquations  $f(x) < k$  (ou  $\leq$ , ou  $>$ , ou  $\geq$ )**

**Exemple :** une fonction  $f$  est représentée ci-dessous.



**Résolution graphique de l'équation  $f(x) = 1$**

- On trace la droite d'équation  $y = 1$ .
- Cette droite coupe la courbe en trois points  $A, B, C$
- Les solutions de l'équation  $f(x) = 1$  sont les abscisses de ces trois points :  $\boxed{-4 \quad -2,5 \quad 2}$ .

**Résolution graphique de l'inéquation  $f(x) < 1$**

- On observe la portion de la courbe qui est en dessous de la droite d'équation  $y = 1$ .
- Les solutions de l'équation  $f(x) < 1$  sont les abscisses des points de cette portion de la courbe.
- Donc l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) < 1$  est  $\boxed{\text{l'intervalle } [-2,5 ; 2]}$ .

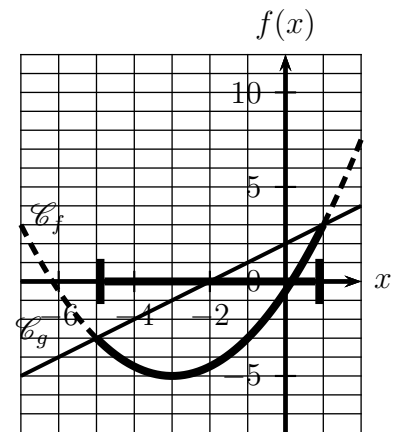
### 3.7 Résolution graphique d'inéquations $f(x) < g(x)$ (ou $\leq$ , ou $>$ , ou $\geq$ )

**Explication pour  $f(x) < g(x)$**

- On observe les portions de la courbe  $\mathcal{C}_f$  où la courbe  $\mathcal{C}_f$  est **en dessous** de la courbe  $\mathcal{C}_g$ .
- Les solutions de l'équation  $f(x) < g(x)$  sont les abscisses des points de ces portions de courbe.

**Exemple :** figure à droite.

L'ensemble des solutions est :  $\mathcal{S} = [-5 ; 1]$



### 3.8 Fonctions paires et impaires

#### 3.8.a Fonction paire

**Définition 3.4 (Fonction paire)**

Dire qu'une fonction  $f$  est paire signifie que pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$ .

**Propriété 3.6 (Courbe d'une fonction paire)**

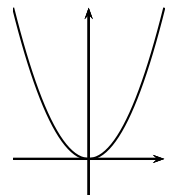
La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Exemple 3.11 (La fonction carré)**

La fonction définie par  $f(x) = x^2$  est paire, en effet, pour tout réel  $x$  :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Comme on le voit ci-contre, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



#### 3.8.b Fonction impaire

**Définition 3.5 (Fonction impaire)**

Dire qu'une fonction  $f$  est impaire signifie que pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .

**Propriété 3.7 (Courbe d'une fonction impaire)**

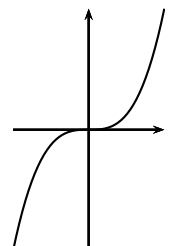
La courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine de ce repère.

**Exemple 3.12 (La fonction cube)**

La fonction définie par  $f(x) = x^3$  est impaire, en effet, pour tout réel  $x$  :

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Comme on le voit ci-contre, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



## 4 Vecteurs

### 4.0 Programme

#### Contenus

- Vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  associé à la translation qui transforme  $M$  en  $M'$ . Direction, sens et norme.
- Égalité de deux vecteurs. Notation  $\vec{u}$  Vecteur nul.
- Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation De Chasles.
- Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.

#### Capacités attendues

- Représenter géométriquement des vecteurs.
- Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

#### Approfondissement possible

Définition vectorielle des homothéties

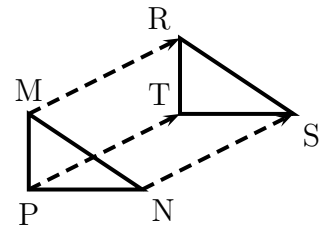
### 4.1 Translation et vecteurs

#### Exemple 4.1

Dans la figure ci-contre, le triangle RST est l'image du triangle MNP par une **translation**.

On peut dire qu'on a fait glisser le triangle MNP sur le triangle RST, en ligne droite, sans tourner.

On dit aussi que cette translation est la translation **de vecteur**  $\overrightarrow{MR}$

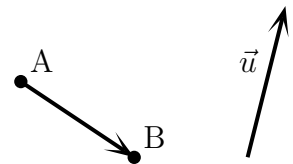


#### Définition 4.1 (Translation et vecteur)

- Une translation est un déplacement en ligne droite, sans tourner.
- Un vecteur est une flèche qui indique le déplacement de la translation.

Pour un vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , le point A est l'**origine** du vecteur et le point B est son **extrémité**.

Un vecteur peut être nommé par son origine et son extrémité (comme  $\overrightarrow{AB}$ ) ou par une seule lettre (comme  $\vec{u}$ ).



#### Définition 4.2 (Vecteur nul)

Si les points A et B sont confondus, on obtient le vecteur  $\overrightarrow{AA}$  qui est le vecteur nul.

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

#### Définition 4.3 (Norme d'un vecteur)

La norme d'un vecteur est sa longueur.

La norme d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est donc la longueur  $AB$  ou la distance  $AB$ .

## 4.2 Égalité de deux vecteurs

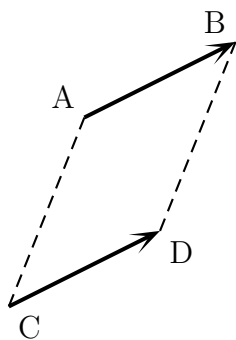


Fig. 4.1

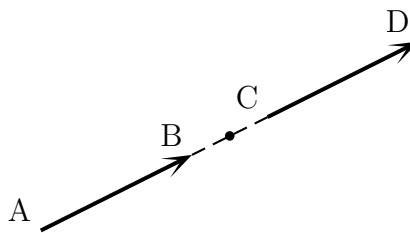


Fig. 4.2

**Définition 4.4**

Pour quatre points A, B, C, D, dire que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  signifie que c'est la même translation qui transforme A en B et C en D.

**Propriété 4.1**

Pour quatre points A, B, C, D, tels que A, B, C ne sont pas alignés, ABDC est un parallélogramme, si et seulement si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Remarque**

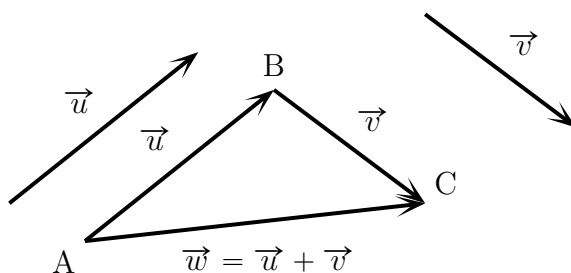
Pour quatre points A, B, C, D, tels que A, B, C sont alignés et  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , on obtient la figure 4.2.

**Propriété 4.2**

Pour quatre points A, B, C, D, dire que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  équivaut à dire que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$

- ont la même direction (c'est à dire  $(AB) \parallel (CD)$ );
- sont de même sens;
- ont la même norme (même longueur).

## 4.3 Somme de deux vecteurs.

**Définition 4.5**

Si on enchaîne une translation de vecteur  $\vec{u}$  puis une translation de vecteur  $\vec{v}$  on obtient une translation de vecteur  $\vec{w}$ . On dit alors que ce vecteur  $\vec{w}$  est la somme des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

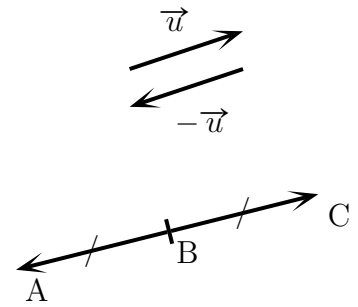
**Propriété 4.3 (Relation de Chasles)**

Pour trois points A, B, C, on a :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .



**Propriété 4.4 (Opposé d'un vecteur)**

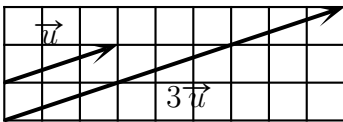
- L'opposé d'un vecteur  $\vec{u}$  s'écrit  $-\vec{u}$
- Un vecteur et son opposé ont même direction, même longueur, et sont de sens opposés.
- Pour deux points A et B,  $-\vec{AB} = \vec{BA}$
- Pour trois points A, B, C dire que  $\vec{BC} = -\vec{BA}$  équivaut à dire que B est le milieu de [AC]
- Pour deux points A et B et pour un vecteur  $\vec{u}$ , on a les égalités :  
 $\vec{AB} + (-\vec{AB}) = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$  et  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$



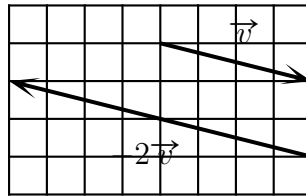
**4.4 Produit d'un vecteur par un nombre réel.**

**Exemple 4.2**

$$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$$



$$-\vec{v} - \vec{v} = -2\vec{v}$$



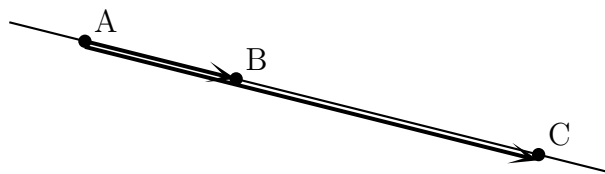
**Remarque :** si  $k$  est positif  $\vec{u}$  et  $k\vec{u}$  sont de même sens ; si  $k$  est négatif  $\vec{u}$  et  $k\vec{u}$  sont de sens opposés.

**Définition 4.6 (Vecteurs colinéaires)**

Dire que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires signifie que il existe un nombre  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou qu'il existe un nombre  $k'$  tel que  $\vec{v} = k'\vec{u}$

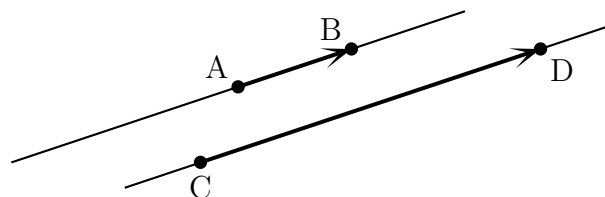
**Propriété 4.5 (Alignement de trois points)**

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.



**Propriété 4.6 (Droites parallèles)**

Pour quatre points A, B, C, D, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.



## 5 Proportion et pourcentage

### 5.0 Programme

#### Contenus

- Proportion, pourcentage d'une sous-population dans une population.
- Ensembles de référence inclus les uns dans les autres : pourcentage de pourcentage.

#### Capacités attendues

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.

### 5.1 Effectifs, proportion et pourcentage

#### Propriété 5.1 (Prendre une proportion ou un pourcentage d'un effectif)

- Pour prendre une proportion d'un effectif, on multiplie cet effectif par cette proportion.
- Cette proportion est souvent une fraction ou un pourcentage.

#### Exemple 5.1 (Prendre une proportion)

Un magasin vend 2 000 smartphones par an. Les  $\frac{4}{5}$  de ces smartphones sont sous Android.

Calculer le nombre de smartphones sous Android vendus par ce magasin.

$$\text{effectif} \times \text{proportion} = 2\,000 \times \frac{4}{5} = \frac{2\,000 \times 4}{5} = \frac{8\,000}{5} = 1\,600$$

Ce magasin vend 1 600 smartphones sous Android par an.

#### Exemple 5.2 (Prendre un pourcentage)

Dans un lycée de 1 500 élèves, 26 % des élèves sont en seconde.

Calculer le nombre d'élèves de seconde de ce lycée.

$$\text{effectif} \times \text{pourcentage} = 1\,500 \times \frac{26}{100} = \frac{1\,500 \times 26}{100} = \frac{39\,000}{100} = 390$$

Le nombre d'élèves de seconde de ce lycée est 390.

#### Définition 5.1 (Calculer une proportion d'une sous-population dans une population. )

La proportion d'une sous-population dans une population est égale à :

$$\frac{\text{Effectif de la sous-population}}{\text{Effectif de la population}}$$

#### Exemple 5.3 (Calculer une proportion en fraction ou en pourcentage)

Dans un lycée, il y a 200 élèves de seconde. Parmi eux, 150 élèves font de l'espagnol.

Calculer la proportion d'élèves qui font de l'espagnol en seconde dans ce lycée.

- Calcul sous forme de fraction.

$$\frac{\text{Effectif de la sous-population}}{\text{Effectif de la population}} = \frac{150}{200} = \frac{\cancel{50} \times 3}{\cancel{50} \times 4} = \frac{3}{4}$$

Donc, dans ce lycée, en seconde,  $\frac{3}{4}$  des élèves font de l'espagnol.

- Calcul sous forme de pourcentage.

$$\frac{\text{Effectif de la sous-population}}{\text{Effectif de la population}} = \frac{150}{200} = 0,75 = \frac{75}{100}.$$

Donc, dans ce lycée, en seconde, 75 % des élèves font de l'espagnol.

## 5.2 Proportion de proportion

### Exemple 5.4

Dans un refuge pour animaux,  $\frac{5}{7}$  des animaux sont des chiens. Au cours d'un week-end,  $\frac{2}{3}$  des chiens sont adoptés.

Quelle proportion les chiens adoptés représentent-ils par rapport à l'effectif de départ de tous les animaux du refuge ?

- Explication par un calcul

Si l'on connaît l'effectif de départ de tous les animaux du refuge, on calcule l'effectif de chiens adoptés ainsi :

$$\text{Effectif total} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \text{Effectif total} \times \frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \text{Effectif total} \times \frac{10}{21}$$

Donc, pour calculer la proportion de chiens adoptés par rapport à l'effectif de départ de tous les animaux du refuge, on effectue le calcul suivant :  $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \frac{10}{21}$ .

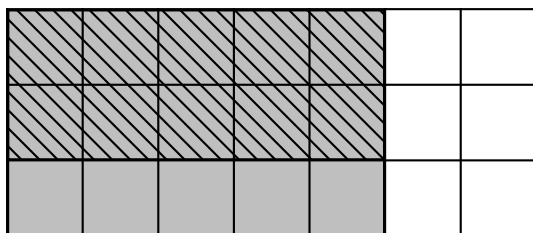
- Explication par un schéma.

Dans le schéma ci-dessous, le grand rectangle représente l'effectif de départ de tous les animaux du refuge.

Le rectangle grisé représente l'effectif des chiens :  $\frac{5}{7}$  de l'effectif total.

Le rectangle hachuré représente les chiens adoptés :  $\frac{2}{3}$  de l'effectif des chiens.

On voit que le rectangle hachuré représente  $\frac{10}{21}$  du grand rectangle soit  $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$ .



## 6 Variations d'une fonction

### 6.0 Programme

#### Contenus

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.

#### Capacités attendues

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Traiter de problèmes d'optimisation.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.
- Pour deux nombres  $a$  et  $b$  donnés et une fonction de référence  $f$ , comparer  $f(a)$  et  $f(b)$  numériquement ou graphiquement.
- Variations des fonctions carré, inverse, cube.

#### Démonstration

Variations des fonctions carré, inverse.

#### Exemple d'algorithme

Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).

### 6.1 Sens de variations d'une fonction

#### Vocabulaire

Le mot *croissant* vient du verbe *croître* qui veut dire *augmenter*.

Le mot *croissant* veut donc dire *qui augmente*, et le mot *décroissant* veut donc dire *qui diminue*.

#### Définition 6.1 (Description intuitive)

- Dire qu'une fonction est croissante sur un intervalle  $[a; b]$  signifie que, dans l'intervalle  $[a; b]$ , lorsque  $x$  augmente,  $f(x)$  augmente.  
Sur l'intervalle  $[a; b]$ , si on parcourt la courbe représentative avec la pointe d'un crayon de la gauche vers la droite, la pointe du crayon monte.
- Dire qu'une fonction est décroissante sur un intervalle  $[a; b]$  signifie que, dans l'intervalle  $[a; b]$ , lorsque  $x$  augmente,  $f(x)$  diminue.  
Sur l'intervalle  $[a; b]$ , si on parcourt la courbe représentative avec la pointe d'un crayon de la gauche vers la droite, la pointe du crayon descend.

#### Définition 6.2

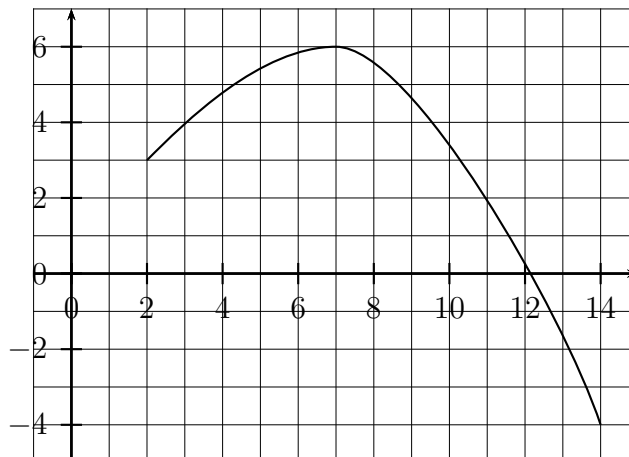
- Dire qu'une fonction est croissante sur un intervalle signifie que pour tous nombres de cet intervalle, deux nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre.
- Dire qu'une fonction est décroissante sur un intervalle signifie que pour tous nombres de cet intervalle, deux nombres et leurs images sont rangés dans l'ordre contraire.

**Définition 6.3**

- Dire qu'une fonction  $f$  est strictement croissante sur un intervalle  $I$  signifie que pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $I$ , si  $a < b$  alors  $f(a) < f(b)$ .
- Dire qu'une fonction  $f$  est strictement décroissante sur un intervalle  $I$  signifie que pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $I$ , si  $a < b$  alors  $f(a) > f(b)$ .

**Exemple 6.1 (Décrire les variations d'une fonction)**

**Énoncé :** l'unité du repère ci-dessous est un carreau. La courbe ci-dessous représente graphiquement une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[2; 14]$ . Décrire le comportement de cette fonction.



**Corrigé :** d'après la courbe de la fonction  $f$ , on peut dire que :

- l'image de 2 est 3;
- l'image de 7 est 6;
- l'image de 14 est  $-4$ ;
- la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[2; 7]$ ;
- la fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $[7; 14]$ .

**6.2 Tableau de variations****Exemple 6.2**

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction  $f$  de l'exemple 6.1 ci-dessus.

$x$	2	7	14
$f(x)$	3	6	$-4$

↗ ↘

**Exemple 6.3**

Une fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[-3; 8]$  et son tableau de variations se trouve ci-contre.

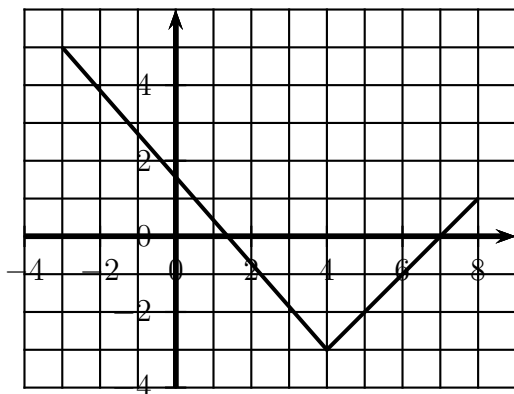
Dessiner une représentation graphique compatible avec ce tableau de variations.

$x$	$-3$	4	8
$f(x)$	5	$-3$	1

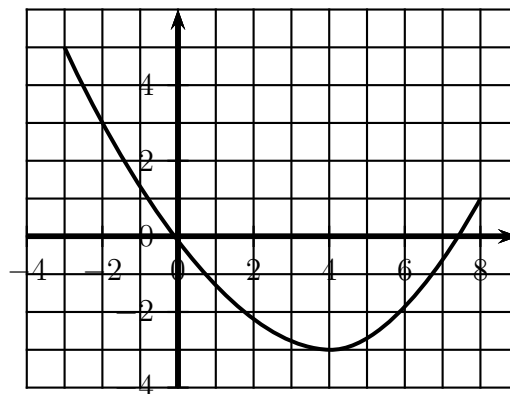
↘ ↗

**Réponse**

On peut avoir comme représentation graphique



ou

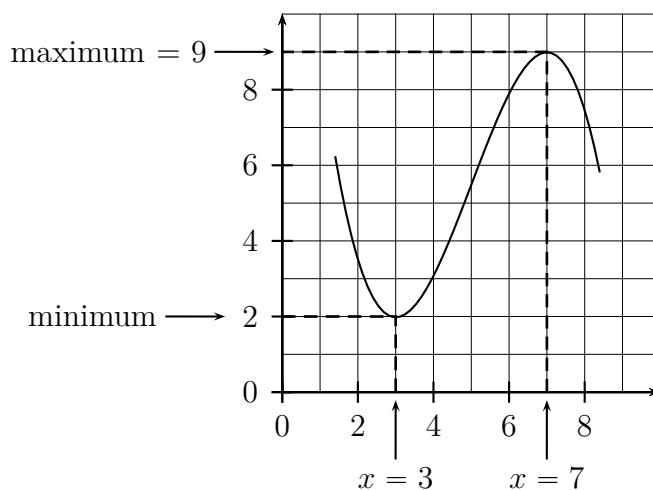
**6.3 Minimum et maximum****Définition 6.4**

- Le maximum  $M$  d'une fonction  $f$  sur un intervalle est la plus grande valeur prise par  $f(x)$  lorsque  $x$  parcourt cet intervalle.  
On a alors, pour tout nombre réel  $x$  de cet intervalle,  $M \geq f(x)$ .
- Le minimum  $m$  d'une fonction  $f$  sur un intervalle est la plus petite valeur prise par  $f(x)$  lorsque  $x$  parcourt cet intervalle.  
On a alors, pour tout nombre réel  $x$  de cet intervalle,  $m \leq f(x)$ .

**Exemple 6.4**

La fonction  $f$  est représentée ci-contre sur l'intervalle  $[1, 4 ; 8, 4]$ .

- Le minimum de la fonction  $f$  est 2, et il est atteint lorsque  $x = 3$ .
- Le maximum de la fonction  $f$  est 9, et il est atteint lorsque  $x = 7$ .

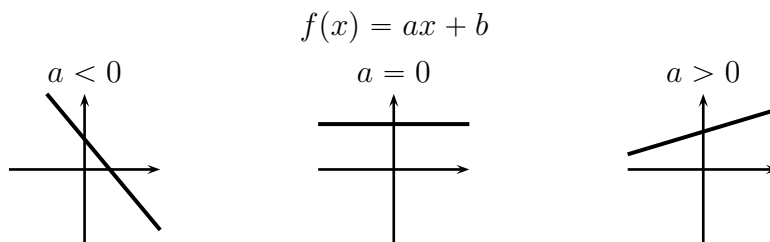


## 6.4 Variations d'une fonction affine

### 6.4.a Sens de variation d'une fonction affine.

#### Propriété 6.1

- Une fonction affine de coefficient directeur positif est croissante;
- Une fonction affine de coefficient directeur négatif est décroissante;
- Une fonction affine de coefficient directeur nul est constante.



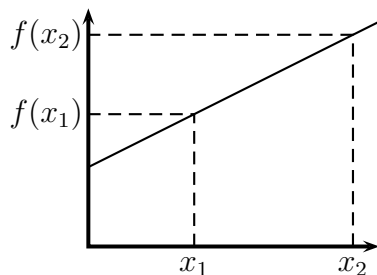
### 6.4.b Taux de variations

#### Propriété 6.2

Pour deux nombres différents  $x_1$  et  $x_2$  et une fonction affine, définie par  $f(x) = ax + b$ , on a :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

#### Figure



#### Remarque

Le taux de variation est aussi appelé taux d'accroissement. Dans le cas d'une fonction affine décroissante, le taux d'accroissement est négatif et dans ce cas, le mot *accroissement* est trompeur puisqu'il s'agit d'une diminution, alors que le mot *variation* peut indiquer un accroissement ou une diminution.

6.4.c Calculer une fonction affine

Plus exactement, pour une fonction affine définie par  $f(x) = ax + b$ , on peut calculer le coefficient directeur  $a$  et l'ordonnée à l'origine  $b$  quand on connaît deux nombres et leurs images par cette fonction affine  $f$ .

**Exemple 6.5**

La droite  $(AB)$  tracée ci-dessous représente une fonction affine  $f$ , définie par  $f(x) = ax + b$ .

Calculons le coefficient directeur  $a$  et l'ordonnée à l'origine  $b$ .

Par lecture graphique, on a :  $x_A = 2$   $x_B = 6$   $f(x_A) = 4$   $f(x_B) = 6$

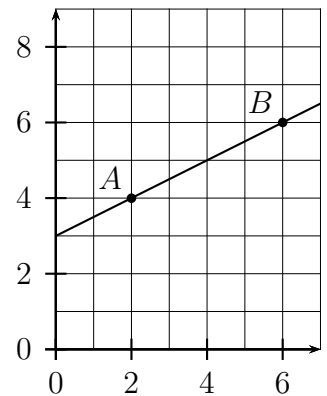
Coefficient directeur :  $a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{6 - 4}{6 - 2} = \frac{2}{4} = 0,5$

Donc :  $f(x) = 0,5x + b$

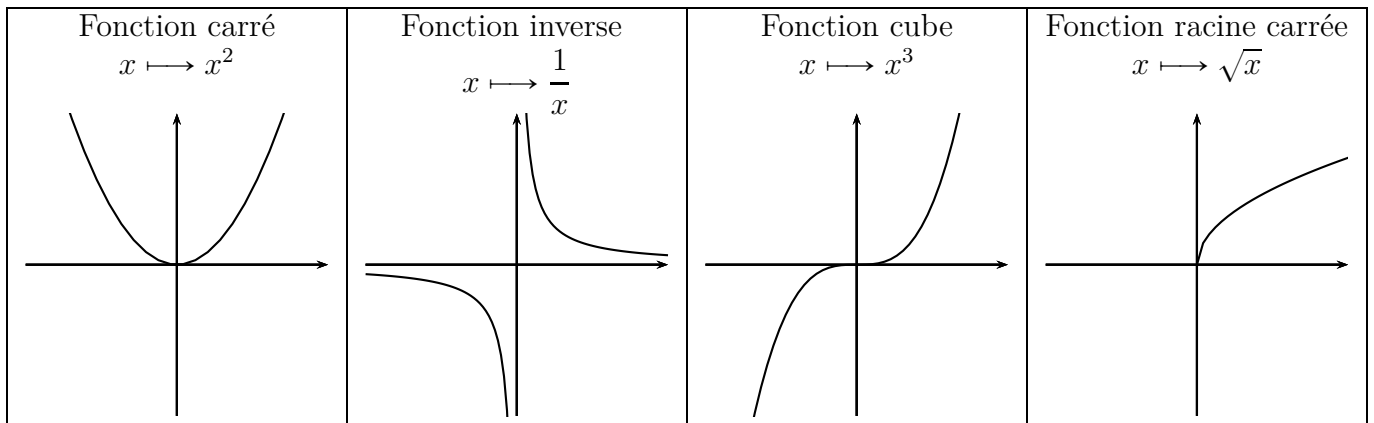
Ordonnée à l'origine :

On a :  $f(x_A) = 0,5x_A + b \iff b = f(x_A) - 0,5x_A = 4 - 0,5 \times 2 = 3$

Donc :  $f(x) = 0,5x + 3$



6.5 Variations des fonctions carré, inverse, cube, racine carrée



**Propriété 6.3 (Variations de la fonction carré)**

- La fonction carré est décroissante sur  $] -\infty ; 0]$ .
- La fonction carré est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

**Propriété 6.4 (Variations de la fonction inverse)**

- La fonction inverse est décroissante sur  $] -\infty ; 0[$ .
- La fonction inverse est décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

**Propriété 6.5 (Variations de la fonction cube)**

La fonction cube est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 6.6 (Variations de la fonction racine carrée)**

La fonction racine carrée est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .



## 7 Arithmétique

### 7.0 Programme

#### Contenus

- Définition des notions de multiple, de diviseur
- Définition des notions de nombre pair, de nombre impair.

#### Capacités attendues

- Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
- Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.

#### Démonstrations

- Pour une valeur numérique de  $a$ , la somme de deux multiples de  $a$  est multiple de  $a$ .
- Le nombre rationnel  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal.
- Le nombre réel  $\sqrt{2}$  est irrationnel.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

#### Exemple d'algorithme

- Déterminer si un entier naturel  $a$  est multiple d'un entier naturel  $b$ .
- Pour des entiers  $a$  et  $b$  donnés, déterminer le plus grand multiple de  $a$  inférieur ou égal à  $b$ .
- Déterminer si un entier naturel est premier.

### 7.1 Divisibilité

#### 7.1.a Définition et vocabulaire

##### Définition 7.1 (Divisibilité)

Dire qu'un nombre entier  $a$  est divisible par un nombre entier  $b$  non nul signifie qu'il existe un nombre entier  $k$  tel que  $a = b \times k$ .

##### Définition 7.2 (Divisible, multiple, diviseur, divise)

Pour deux nombres entiers  $a$  et  $b$ , les expressions suivantes sont équivalentes :

- $a$  est divisible par  $b$  ;
- $a$  est multiple de  $b$  ;
- $b$  est un diviseur de  $a$ .
- $b$  divise  $a$ .

#### Exemple

14 est divisible par 2, puisque :  $14 = 2 \times 7$  et on dit aussi que 14 est multiple de 2 ou que 2 est un diviseur de 14 ou encore que 2 divise 14.

**7.1.b Critères de divisibilité**

**Propriété 7.1**

- Pour tout nombre divisible par 2, son chiffre des unités est 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.
- Pour tout nombre divisible par 3, sa somme des chiffres est un multiple de 3.
- Pour tout nombre divisible par 5, son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Pour tout nombre divisible par 9, sa somme des chiffres est un multiple de 9.
- Pour tout nombre divisible par 10, son chiffre des unités est 0.

**7.1.c Nombres pairs et impairs**

**Définition 7.3**

- Un nombre pair est un nombre entier multiple de 2.
- Un nombre impair est un nombre entier qui n'est pas multiple de 2.

**Propriété 7.2**

- Pour tout nombre pair, son chiffre des unités est pair (0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8).
- Pour tout nombre impair, son chiffre des unités est impair (1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9).

**7.2 La division euclidienne**

**7.2.a Propriété et exemples**

**Propriété 7.3 (Division euclidienne)**

Pour un nombre entier  $a$  et un nombre entier naturel non nul  $b$ , il existe un seul couple de nombres entiers  $(q, r)$  tel que :  $a = bq + r$  et  $0 \leq r < b$ .

**Remarques**

On peut traduire la propriété 7.3 par :

dividende = diviseur  $\times$  quotient + reste et reste < diviseur

**Un exemple avec des petits nombres**

Une division euclidienne pour des petits nombres est effectuée à l'aide des tables de multiplication, par exemple la division euclidienne de 27 par 4 :  $27 = 4 \times 6 + 3$  ;  $3 < 4$

Division posée avec la potence : 
$$\begin{array}{r} 27 \mid 4 \\ 3 \mid 6 \end{array}$$

**Un exemple avec des plus grands nombres**

Effectuons par exemple la division euclidienne de 13 473 par 37.

Calculons d'abord le quotient décimal à la calculatrice :  $\frac{13473}{37} \approx 364,1$

Le quotient euclidien de la division euclidienne de 13 473 par 37 est donc la partie entière du résultat précédent, soit 364.

Calculons maintenant le reste :  $13473 - 37 \times 364 = 5$

On a finalement :  $13473 = 37 \times 364 + 5$  ;  $5 < 37$

Division posée avec la potence : 
$$\begin{array}{r} 13473 \mid 37 \\ 237 \mid 364 \\ 153 \mid \\ 5 \end{array}$$

## 7.2.b Utilisation des calculatrices

Reprenons l'exemple précédent : la division euclidienne de 13 473 par 37.

## Division euclidienne avec les calculatrices TI

- **Quotient** Le quotient euclidien, est la partie entière de  $\frac{13\,473}{37}$ , donc :
  - on utilise les touches :  $\boxed{\text{math}} \boxed{\rightarrow} \boxed{3}$
  - on complète ainsi :  $\text{ent}(13473/37)$
  - on appuie sur  $\boxed{\text{entrer}}$
  - Affichage :  $\boxed{364}$
- **Reste avec la TI-82 Advanced ou la TI-83 Premium**
  - on utilise les touches :  $\boxed{\text{math}} \boxed{\rightarrow} \boxed{0}$
  - on complète ainsi :  $\text{remainder}(13473,37)$  ou  $\text{reste}(13473,37)$
  - on appuie sur  $\boxed{\text{entrer}}$
  - Affichage :  $\boxed{5}$
- **Calcul du reste sans la commande reste ou remainder**  
 On calcule tout simplement :  $13\,473 - 37 \times 364 = 5$ .  
 Si l'on veut calculer le reste en une seule suite de calculs :  
 $13473-37*\text{ent}(13473/37)$  Affichage : 5

## Division euclidienne avec la CASIO

Appuyer sur la touche  $\boxed{\text{MENU}}$  et choisir le module RUN MAT.

Appuyer sur les touches :  $\boxed{\text{OPTN}} \boxed{\text{F4}}$  (CALC)  $\boxed{\text{F6}}$  ( $\rightarrow$ )  $\boxed{\text{F6}}$  ( $\rightarrow$ )

- **Quotient**
  - saisir : 13473  $\boxed{\text{F1}}$  (Int $\div$ ) 37
  - on voit : 13473 Int $\div$  37
  - appuyer sur  $\boxed{\text{EXE}}$
  - Affichage :  $\boxed{364}$
- **Reste**  
 Même procédure que pour le quotient, en remplaçant  $\boxed{\text{F1}}$  (Int $\div$ ) par  $\boxed{\text{F2}}$  (Rmdr $\div$ ).

## Division euclidienne avec la NUMWORKS

Dans l'application Calculs, on utilise la touche Toolbox :  $\boxed{\text{paste"}}$

- **Quotient**
  - touche Toolbox
  - on choisit la rubrique Arithmetique
  - touche  $\boxed{\rightarrow}$
  - descendre jusqu'à : quo(p,q)
  - appuyer sur  $\boxed{\text{EXE}}$
  - on voit : quo(,)
  - compléter ainsi : quo(13473,37)
  - appuyer sur  $\boxed{\text{EXE}}$
  - Affichage :  $\boxed{364}$
- **Reste**  
 Même procédure que pour le quotient, en remplaçant quo(p,q) par rem(p,q) et quo(13473,37) par rem(13473,37).

## 7.2.c Utilisation des logiciels et de python3

	GeoGebra	LibreOffice	Xcas	wxMaxima	python3
Quotient de la division euclidienne de $a$ par $b$	Quotient[a,b]	=QUOTIENT(a;b)	iquo(a,b)	floor(a/b)	a//b
Reste de la division euclidienne de $a$ par $b$	Reste[a,b]	=MOD(a;b)	irem(a,b)	mod(a,b)	a%b
Division euclidienne de $a$ par $b$	Division[a,b]		iquorem(a,b)	divide(a,b)	

## 7.2.d Division euclidienne et divisibilité

## Propriété 7.4

Pour un nombre entier  $a$  et un nombre entier  $b$  non nul, dire que  $a$  est divisible par  $b$  signifie que le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  est zéro.

## Démonstration

Dire qu'un nombre entier  $a$  est divisible par un nombre entier  $b$  non nul signifie qu'il existe un nombre entier  $k$  tel que  $a = b \times k$ , autrement dit  $a = b \times k + 0$ , ce qui signifie que le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  est zéro.

**Remarque :** cette propriété vient compléter la définition 7.2.

## 7.3 Méthodes de divisibilité

## Méthode 7.1 (Tous les moyens de vérifier si un entier est divisible par un autre)

- Pour savoir si un nombre entier est divisible par 2, par 3, par 5, par 9, par 10, on utilise un critère de divisibilité.
- Dans les autres cas, pour savoir si un nombre entier  $a$  est divisible par un nombre  $b$ , on peut :
  - diviser  $a$  par  $b$  à la calculatrice et vérifier si le résultat est entier ou pas ;
  - vérifier si le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  est égal à zéro ou pas.

## 7.4 Nombres premiers

## 7.4.a Définition et propriétés

## Définition 7.4

Un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à deux qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

## Exemple 7.1

Étudions les entiers de 0 à 30.

0 n'est pas premier, il a une infinité de diviseurs.

1 n'est pas premier parce qu'il a un seul diviseur : 1.

Les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 sont premiers.

Le nombre 4 n'est pas premier puisque 4 a 3 diviseurs : 1, 2, 4.

De même 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30 ne sont pas premiers.

**Remarque :** d'après ce qui précède un nombre premier est supérieur ou égal à 2.

**Exemple 7.2**

Vérifions si 31 est premier ou non.

31 n'est pas divisible par 2, ni par 3, ni par 5.

Donc 31 n'est pas non plus divisible par les multiples de 2, de 3, et de 5, c'est à dire :

- 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28
- 9; 15; 21; 27
- 25

Il reste à vérifier pour 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29

$$31 = 7 \times 4 + 3 \quad 31 = 11 \times 2 + 9 \quad 31 = 13 \times 2 + 5 \quad 31 = 17 \times 1 + 14 \quad 31 = 19 \times 1 + 12$$

$$31 = 23 \times 1 + 8 \quad 31 = 29 \times 1 + 2$$

Tous les restes de ces divisions euclidiennes sont non nuls, donc 31 n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui même, par conséquent 31 est premier.

**7.4.b Décomposition en facteurs premiers**

**Propriété 7.5 (Décomposition en facteurs premiers)**

Tout entier naturel supérieur ou égal à deux admet une unique décomposition sous forme de produit de puissances de nombres premiers.

**Exemples**

$$12 = 2^2 \times 3 \quad 360 = 2^3 \times 5 \times 3^2$$

**Méthode 7.2**

La calculatrice Numworks permet d'obtenir la décomposition en facteurs premiers d'un entier.

Reprenons l'exemple de  $360 = 2^3 \times 5 \times 3^2$

- Module Calculs
- Touche « Boîte à outils »
- Descendre sur Arithmétique
- Aller à droite
- Dans la liste déroulante, aller sur factor(n)
- Valider
- On voit factor()
- On complète factor(360) et on valide.

**7.5 Fraction irréductible**

**Définition 7.5 (Fraction)**

Une fraction est une expression de la forme  $\frac{a}{b}$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers et  $b \neq 0$ .

**Définition 7.6 (Fractions égales)**

Pour une fraction  $\frac{a}{b}$  et pout tout nombre  $k$  non nul, on a :  $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

**Exemple 7.3 (Simplifier une fraction)**

$$\frac{70}{42} = \frac{2 \times 35}{2 \times 21} = \frac{35}{21} = \frac{7 \times 5}{7 \times 3} = \frac{5}{3}$$

On a simplifié la fraction  $\frac{70}{42}$ , et on a obtenu la fraction  $\frac{5}{3}$ .

La fraction  $\frac{5}{3}$  ne peut pas être simplifiée, on dit qu'elle est irréductible.

La fraction  $\frac{70}{42}$ , peut être simplifiée, donc elle n'est pas irréductible.

**Définition 7.7 (Fraction irréductible)**

Une fraction irréductible est une fraction qui ne peut pas être simplifiée.
---

## 8 Géométrie plane

### 8.0 Programme

#### Contenus

- Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

#### Capacités attendues

- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Traiter de problèmes d'optimisation.
- Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.

#### Démonstration

- Relation trigonométrique  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$  dans un triangle rectangle.
- Le projeté orthogonal du point  $M$  sur une droite  $\Delta$  est le point de la droite  $\Delta$  le plus proche du point  $M$ .

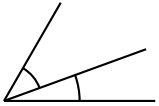
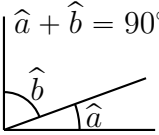
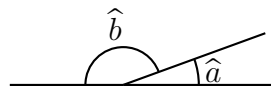
#### Approfondissements possibles

- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle  $\frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$ .
- Formule d'Al-Kashi.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

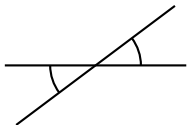

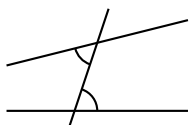
### 8.1 Rappels de géométrie de collège

#### 8.1.a Angles

##### Définition 8.1 (Angles adjacents, complémentaires, supplémentaires)

 <p>angles adjacents</p>	$\hat{a} + \hat{b} = 90^\circ$  <p>angles adjacents et complémentaires</p>	$\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$  <p>angles adjacents et supplémentaires</p>
---	---	--

##### Définition 8.2 (Angles opposés, correspondants et alternes-internes)

 <p>angles opposés</p>	 <p>angles correspondants</p>	 <p>angles alternes-internes</p>
---	--	---

#### Propriété 8.1

Deux angles opposés sont égaux.

#### Propriété 8.2

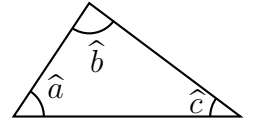
Deux droites sont coupées par une sécante.

- Ces deux droites sont parallèles si et seulement si les angles correspondants sont égaux.
- Ces deux droites sont parallèles si et seulement si les angles alternes-internes sont égaux.

**Propriété 8.3**

La somme des angles d'un triangle est  $180^\circ$ .

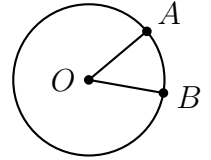
$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$



**8.1.b Cercle**

**Propriété 8.4**

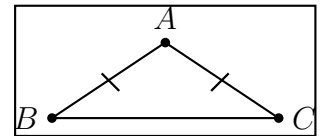
Pour trois points  $O, A, B$  du plan,  
 $OA = OB$  si et seulement si  $A$  et  $B$  sont sur un même cercle de centre  $O$ .



**8.1.c Triangle isocèle**

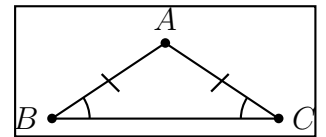
**Définition 8.3**

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux.



**Propriété 8.5**

Un triangle est isocèle si et seulement si il a deux angles égaux.



**8.1.d Parallélogramme**

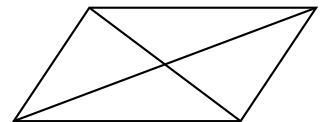
**Définition 8.4**

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



**Propriété 8.6**

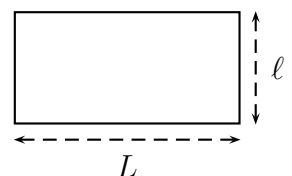
Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.



**8.1.e Calculs d'aires**

**Propriété 8.7**

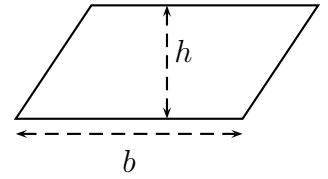
L'aire d'un rectangle est égale à longueur  $\times$  largeur :  $\mathcal{A} = L \times \ell$



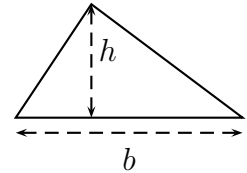


**Propriété 8.8**

L'aire d'un parallélogramme est égale à base  $\times$  hauteur :  $\mathcal{A} = b \times h$

**Propriété 8.9**

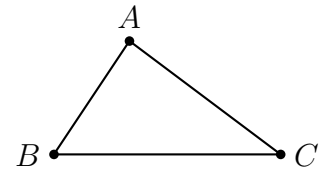
L'aire d'un triangle est égale à  $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$  :  $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$ .

**8.1.f Propriétés de Pythagore et de Thalès****Propriété 8.10 (Propriété de Pythagore)**

Un triangle est rectangle si et seulement si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Autrement dit, pour un triangle  $ABC$ ,

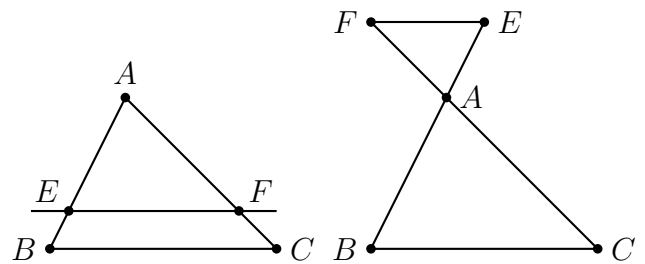
- si  $ABC$  est rectangle en  $A$ , alors  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ;
- si  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , alors  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

**Propriété 8.11 (Propriété de Thalès)**

Pour un triangle  $ABC$ ,

- si le point  $E$  appartient à la droite  $(AB)$ ,
- si le point  $F$  appartient à la droite  $(AC)$ ,
- si les droites  $(EF)$  et  $(BC)$  sont parallèles,

alors  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ .



## 8.1.g Trigonométrie

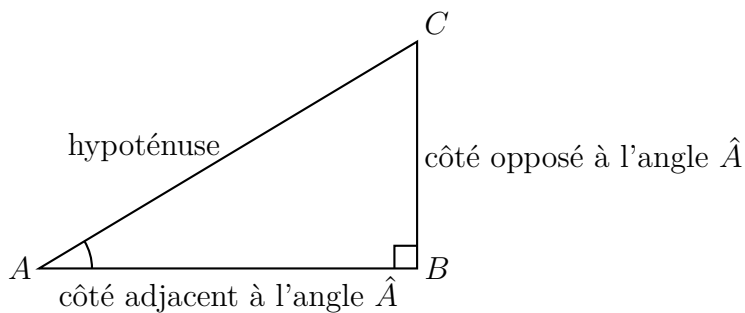
## Propriété 8.12

Dans un triangle rectangle,

cosinus d'un angle aigu =  $\frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

sinus d'un angle aigu =  $\frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

tangente d'un angle aigu =  $\frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$



$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \quad \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

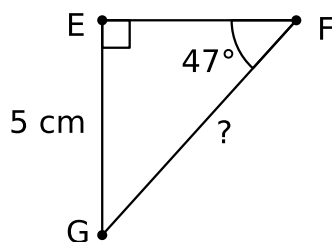
$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

## Remarque 8.1

- le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1 ;
- la tangente d'un angle aigu est un nombre positif ;
- la tangente de  $90^\circ$  n'existe pas.

## Exemple 8.1 (Calcul de longueur)

Calcul de la longueur  $FG$  dans le triangle rectangle  $EFG$ .



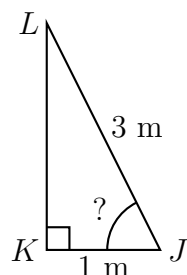
$$\frac{\sin 47^\circ}{1} = \frac{5}{FG}$$

$$FG = \frac{1 \times 5}{\sin 47^\circ}$$

$$FG \approx 6,836637305 \approx \boxed{6,8\text{cm}}$$

## Exemple 8.2 (Calcul d'angle)

Calculer l'angle  $\widehat{KJL}$  dans le triangle rectangle  $JKL$ . Arrondir le résultat à l'unité près.



$$\cos(\widehat{KJL}) = \frac{KJ}{LJ} = \frac{1}{3}$$

$$\widehat{KJL} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \quad (\text{ou } \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right))$$

$$\widehat{KJL} \approx 70,52877937 \approx \boxed{71^\circ}$$

## 8.2 Une égalité entre sinus et cosinus

### Propriété 8.13

Pour tout angle de mesure  $\alpha$ , on a l'égalité :  $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$

#### Démonstration

On considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $B$  tel que  $\widehat{BAC} = \alpha$ .

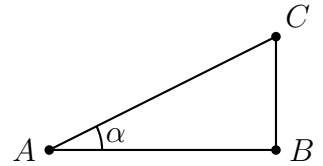
On sait que  $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC}$  et que  $\sin(\alpha) = \frac{BC}{AC}$ .

On a alors :

$$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$$

Or, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ , donc, d'après la propriété de Pythagore,  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ .

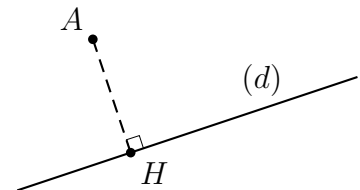
Donc,  $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$



## 8.3 Projeté orthogonal

### Définition 8.5

Pour un point  $A$  et une droite  $(d)$  du plan, le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(d)$  est le point  $H$  tel que la perpendiculaire à  $(d)$  passant par  $A$  coupe  $(d)$  en  $H$ .



### Propriété 8.14

Le projeté orthogonal du point  $A$  sur une droite  $(d)$  est le point de la droite  $(d)$  le plus proche du point  $A$ .

#### Démonstration

Considérons un point  $A$ , une droite  $(d)$ , le point  $H$  projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(d)$ , et un point  $M$  sur la droite  $(d)$  différent du point  $H$ .

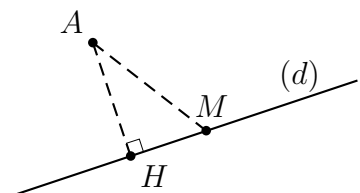
Démontrons qu'alors  $AM > AH$ .

On sait que la droite  $(AH)$  est perpendiculaire à la droite  $(d)$ , par conséquent, le triangle  $AHM$  est rectangle en  $H$ . Donc, d'après la propriété de Pythagore,  $AM^2 = AH^2 + MH^2$ .

Or, le point  $M$  est différent du point  $H$ , de sorte que  $MH^2 > 0$ , donc  $AM^2 > AH^2$ , or  $AM$  et  $AH$  sont positifs parce que ce sont des distances, donc  $AM > AH$ .

Nous avons ainsi démontré que tout point  $M$  de la droite  $(d)$  différent du point  $H$  est plus éloigné du point  $A$  que le point  $H$ .

Autrement dit, le point  $H$  est le point de la droite  $(d)$  le plus proche du point  $A$ .



## 9 Inégalités et inéquations

### 9.0 Programme

#### Contenus

Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.

#### Capacités attendues

- Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.
- Modéliser un problème par une inéquation.
- Résoudre une inéquation du premier degré.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.
- Résoudre une inéquation du type  $f(x) < k$ , en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une inéquation du type  $f(x) < g(x)$

#### Démonstrations

Étudier la position relative des courbes d'équation  $y = x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ , pour  $x \geq 0$ .

### 9.1 Règles sur les inégalités

#### Propriété 9.1 (Ajouter ou soustraire un nombre aux deux membres d'une inégalité)

On ne change pas le sens d'une inégalité si on ajoute ou si on soustrait le même nombre aux deux membres de cette inégalité.

Autrement dit, pour des nombres réels  $a, b, c$ ,

si  $a < b$  alors  $a + c < b + c$  et si  $a < b$  alors  $a - c < b - c$ .

#### Exemple 9.1

Ci-dessous on part de l'inégalité  $5 < 9$ , on ajoute 7 à 5 et à 9, et on voit bien que l'inégalité ne change pas de sens.

$$5 < 9 \quad 5 + 7 = 12 \quad 9 + 7 = 16 \quad \text{donc } 5 + 7 < 9 + 7$$

Ci-dessous on part de l'inégalité  $5 < 9$ , on soustrait 3 à 5 et à 9, et on voit bien que l'inégalité ne change pas de sens.

$$5 < 9 \quad 5 - 3 = 2 \quad 9 - 3 = 6 \quad \text{donc } 5 - 3 < 9 - 3$$

#### Propriété 9.2 (Multiplier ou diviser par le même nombre positif)

On ne change pas le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise par le même nombre positif les deux membres de cette inégalité.

Autrement dit, pour des nombres réels  $a, b, c$ ,

- si  $a < b$  et si  $c$  est positif, alors  $a \times c < b \times c$ .

- si  $a < b$  et si  $c$  est strictement positif, alors  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

#### Exemple 9.2

Ci-dessous on part de l'inégalité  $6 < 18$ , on multiplie 6 et 18 par 100 qui est positif, et on voit bien que l'inégalité ne change pas de sens.

$$6 < 18 \quad 6 \times 100 = 600 \quad 18 \times 100 = 1800 \quad \text{donc } 6 \times 100 < 18 \times 100$$

Ci-dessous on part de l'inégalité  $6 < 18$ , on divise 6 et 18 par 3 qui est positif, et on voit bien que l'inégalité ne change pas de sens

$$6 < 18 \quad \frac{6}{3} = 2 \quad \frac{18}{3} = 6 \quad \text{donc} \quad \frac{6}{3} < \frac{18}{3}$$

**Propriété 9.3 (Multiplier ou diviser par le même nombre négatif)**

On change le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise par le même nombre négatif les deux membres de cette inégalité.

Autrement dit, pour des nombres réels  $a, b, c$ ,

- si  $a < b$  et si  $c$  est négatif, alors  $a \times c > b \times c$ .
- si  $a < b$  et si  $c$  est strictement négatif, alors  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

**Exemple 9.3**

Ci-dessous on part de l'inégalité  $6 < 18$ , on multiplie 6 et 18 par  $-10$  qui est négatif, et on voit bien que l'inégalité change de sens.

$$6 < 18 \quad 6 \times (-10) = -60 \quad 18 \times (-10) = -180 \quad \text{donc} \quad 6 \times (-10) > 18 \times (-10)$$

Ci-dessous on part de l'inégalité  $6 < 18$ , on divise 6 et 18 par  $-2$  qui est négatif, et on voit bien que l'inégalité change de sens.

$$6 < 18 \quad \frac{6}{-2} = -3 \quad \frac{18}{-2} = -9 \quad \text{donc} \quad \frac{6}{-2} > \frac{18}{-2}$$

**Propriété 9.4 (Comparer deux nombres en utilisant leur différence)**

Pour deux nombres réels  $a$  et  $b$ ,  $a \leq b \iff a - b \leq 0$  et  $a \geq b \iff a - b \geq 0$ .

**Propriété 9.5 (Comparer deux nombres positifs en utilisant leur quotient)**

Pour deux nombres réels  $a \geq 0$  et  $b > 0$ ,  $a \leq b \iff \frac{a}{b} \leq 1$  et  $a \geq b \iff \frac{a}{b} \geq 1$ .

**9.2 Inéquation du premier degré**

**Exemple 9.4**

Résolution de l'inéquation :  $2x \leq 5$

Pour isoler  $x$ , on divise par 2 les deux membres de cette inégalité.

Le nombre 2 est strictement positif, donc cela ne change pas le sens de l'inégalité.

$$2x \leq 5 \iff \frac{2x}{2} \leq \frac{5}{2} \iff x \leq 2,5 \quad \boxed{\text{L'ensemble des solutions est } ] -\infty ; 2,5].}$$

**Exemple 9.5**

Résolution de l'inéquation :  $-4x \leq 13$

Pour isoler  $x$ , on divise par  $-4$  les deux membres de cette inégalité.

Le nombre  $-4$  est strictement négatif, donc cela change le sens de l'inégalité.

$$-4x \leq 13 \iff \frac{-4x}{-4} \geq \frac{13}{-4} \iff x \geq -3,25 \quad \boxed{\text{L'ensemble des solutions est } [-3,25 ; +\infty[.}$$

**Exemple 9.6**Résolution de l'inéquation :  $-5x + 6 > 27$ 

$$\begin{aligned} & -5x + 6 > 27 \\ \Leftrightarrow & -5x + 6 - 6 > 27 - 6 \quad \text{pas de changement de sens, on soustrait 6 de chaque côté} \\ \Leftrightarrow & -5x > 21 \\ \Leftrightarrow & \frac{-5x}{-5} < \frac{21}{-5} \quad \text{changement de sens, on divise par } -5 \text{ de chaque côté} \\ \Leftrightarrow & x < -4,2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; -4,2[$ .
--

**Exemple 9.7**Résolution de l'inéquation :  $7x + 9 < 4x - 2$ 

$$\begin{aligned} & 7x + 9 < 4x - 2 \\ \Leftrightarrow & 7x + 9 - 4x < \cancel{4x} - 2 \cancel{-4x} \\ \Leftrightarrow & 3x + 9 < -2 \\ \Leftrightarrow & 3x \cancel{+9} \cancel{-9} < -2 - 9 \\ \Leftrightarrow & 3x < -11 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x}{3} < \frac{-11}{3} \quad \text{pas de changement de sens, on divise par 3 qui est positif} \\ \Leftrightarrow & x < \frac{-11}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; -\frac{11}{3}[$ .
---

### 9.3 Exemple de résolution d'un problème

#### Énoncé

On propose à un employé le choix entre deux contrats.

- contrat A : un salaire mensuel fixe de 2 200 €
- contrat B : un salaire mensuel fixe de 1 800 € et 5 % du montant des ventes en euros pendant le mois.

Quel est le contrat plus avantageux? Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

#### Quelques essais

Calculs du salaire B pour un montant de ventes

- de 1 000 € :  $1\,800 + 0,05 \times 1\,000 = 1\,850 < 2\,200$  le contrat B est moins avantageux
- de 5 000 € :  $1\,800 + 0,05 \times 5\,000 = 2\,050 < 2\,200$  le contrat B est moins avantageux
- de 10 000 € :  $1\,800 + 0,05 \times 10\,000 = 2\,300 > 2\,200$  le contrat B est plus avantageux

#### Mise en inéquation du problème

- **Choix de l'inconnue**

On appelle  $x$  le montant des ventes du mois en euros.

- **Écrire une inéquation**

Le salaire mensuel du contrat B en fonction de  $x$  est  $1\,800 + 0,05x$

Dire que le contrat B est plus avantageux que le contrat A signifie que :  $1\,800 + 0,05x > 2\,200$

- **Résoudre cette inéquation.**

$$1\,800 + 0,05x > 2\,200 \iff 0,05x > 2\,200 - 1\,800$$

$$\iff 0,05x > 400$$

$$\iff x > \frac{400}{0,05}$$

division par 0,05 pas de changement de sens

$$\iff x > 8\,000$$

- **Vérifier par des calculs.**

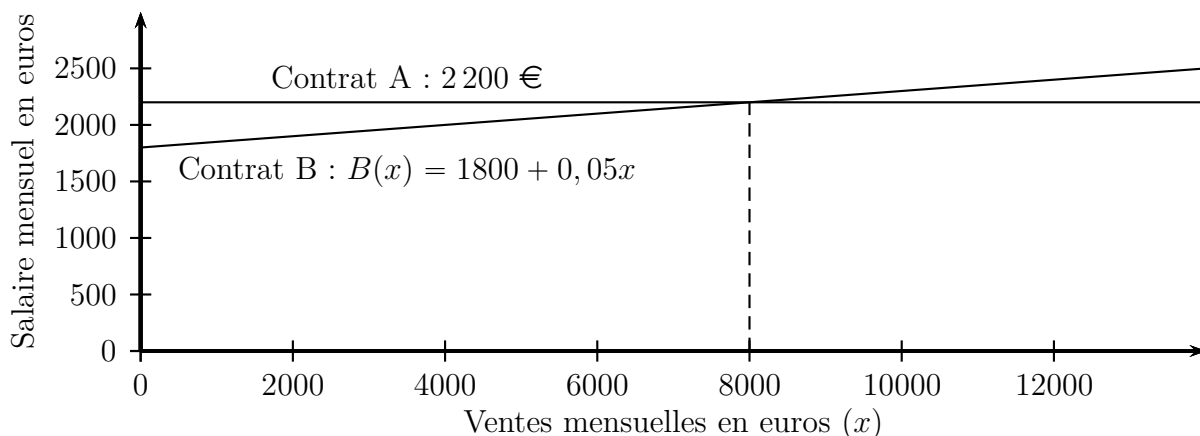
Le salaire mensuel avec le contrat B est :

- pour 8 000 € de ventes :  $1\,800 + 0,05 \times 8\,000 = 2\,200$  même salaire qu'avec le contrat A ;
- pour 9 000 € de ventes :  $1\,800 + 0,05 \times 9\,000 = 2\,250 > 2\,200$  le contrat B est plus avantageux.

- **Conclusion :**

- Pour un montant de ventes inférieur à 8 000 €, le contrat A est le plus avantageux.
- Pour un montant de ventes égal à 8 000 €, les contrats A et B sont aussi avantageux l'un que l'autre.
- Pour un montant de ventes supérieur à 8 000 €, le contrat B est le plus avantageux.

#### Utilisation d'un graphique



## 9.4 Signe de $ax + b$

### Exemple 9.8

Quel est le signe de  $4x + 12$  selon les valeurs de  $x$  ?

#### Tableau de valeurs

$x$	-7	-5	-3	-1	1	3	5
$4x + 12$	-16	-8	0	8	16	24	32

On constate que

- si  $x < -3$ , alors  $4x + 12$  est négatif ;
- si  $x = -3$ , alors  $4x + 12 = 0$  ;
- si  $x > -3$ , alors  $4x + 12$  est positif.

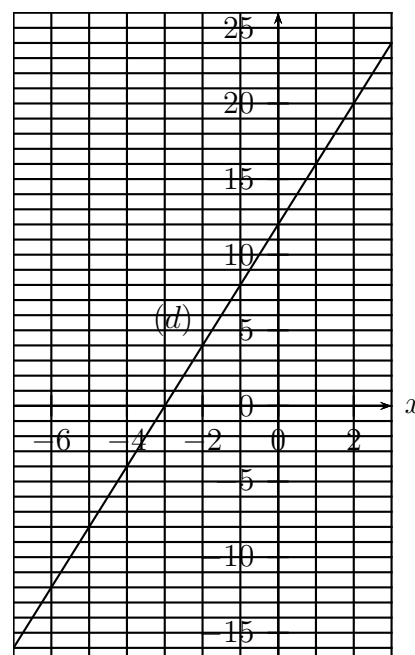
#### Observation graphique

Traçons la représentation graphique de la fonction définie par  $f(x) = 4x + 12$ .

On sait que c'est une droite  $(d)$  parce que la fonction  $f$  est une fonction affine.

On observe que

- si  $x < -3$ , la droite  $(d)$  est en dessous de l'axe des abscisses ;
- si  $x = -3$ , la droite  $(d)$  coupe l'axe des abscisses ;
- si  $x > -3$ , la droite  $(d)$  est au dessus de l'axe des abscisses.



#### Méthode pour étudier le signe de $4x + 12$

On résout l'inéquation  $4x + 12 \geq 0$

$$\begin{aligned}
 4x + 12 \geq 0 &\iff 4x + 12 - 12 \geq 0 - 12 \\
 &\iff 4x \geq -12 \\
 &\iff \frac{4x}{4} \geq \frac{-12}{4} \\
 &\iff x \geq -3
 \end{aligned}$$

Donc  $4x + 12$  est positif lorsque  $x \geq -3$ , par conséquent,  $4x + 12$  est négatif lorsque  $x \leq -3$ .

Pour indiquer le signe de  $4x + 12$  selon les valeurs de  $x$ , on dresse un tableau de signes, voir ci-dessous.

$x$	$-\infty$	$-3$	$+\infty$
Signe de $4x + 12$	-	0	+



**Exemple 9.9**

Étude du signe de  $-2x + 9$  selon les valeurs de  $x$ .

On résout l'inéquation  $-2x + 9 \geq 0$

$$-2x + 9 \geq 0 \iff -2x \geq -9 \iff x \leq \frac{-9}{-2} \iff x \leq 4,5$$

Attention, à la 3<sup>e</sup> étape, l'inégalité change de sens parce qu'on divise par  $-2$  qui est négatif.

Donc  $-2x + 9$  est positif lorsque  $x \geq 4,5$ , par conséquent,  $-2x + 9$  est négatif lorsque  $x \leq 4,5$ .

Tableau de signes.

$x$	$-\infty$	$4,5$	$+\infty$
Signe de $-2x + 9$	$+$	$0$	$-$

**9.5 Résoudre une inéquation produit****Exemple 9.10**

1. Dresser le tableau de signes de  $(x - 4)(2x + 3)$  en fonction des valeurs de  $x$ .
2. Résoudre l'inéquation  $(x - 4)(2x + 3) \leq 0$ .
3. Résoudre l'inéquation  $(x - 4)(2x + 3) > 0$ .

**Résolution****1. Tableau de signes de  $(x - 4)(2x + 3)$** 

- Signe de  $x - 4$  en fonction de  $x$  :  $x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4$
- Signe de  $2x + 3$  en fonction de  $x$  :  $2x + 3 \geq 0 \iff 2x \geq -3 \iff x \geq -\frac{3}{2}$
- On complète le tableau ci-dessous. Pour la 4<sup>e</sup> ligne on applique la règle des signes de la multiplication.

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$4$	$+\infty$	
Signe de $x - 4$	$-$	$-$	$0$	$+$	
Signe de $2x + 3$	$-$	$0$	$+$	$+$	
Signe de $(x - 4)(2x + 3)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

**2. Inéquation  $(x - 4)(2x + 3) \leq 0$ .**

D'après le tableau  $(x - 4)(2x + 3)$  est négatif lorsque  $x$  appartient à l'intervalle  $\left[-\frac{3}{2}; 4\right]$ .

**3. Inéquation  $(x - 4)(2x + 3) > 0$ .**

D'après le tableau  $(x - 4)(2x + 3)$  est strictement positif lorsque  $x$  appartient à

$$\left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[ \cup ]4; +\infty[.$$

## 10 Vecteurs et coordonnées

### 10.0 Programme

#### Contenus

- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression des coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  en fonction de celles de  $A$  et de  $B$ .
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.

#### Capacités attendues

- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Calculer la distance entre deux points.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

#### Démonstration

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

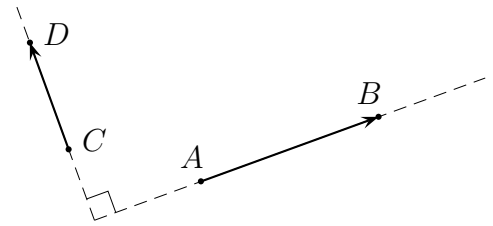
#### Exemple d'algorithme

Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

### 10.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

#### Définition 10.1 (Vecteurs orthogonaux)

Dire que deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont orthogonaux signifie que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont perpendiculaires.



#### Définition 10.2 (Norme d'un vecteur)

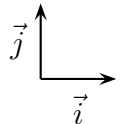
La norme d'un vecteur  $\vec{u}$  est sa longueur, et on la note :  $||\vec{u}||$ .  
 La norme d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est donc la longueur  $AB$  ou la distance  $AB$  :  $||\overrightarrow{AB}|| = AB$ .

#### Définition 10.3 (Base orthonormée)

Une base orthonormée du plan est formée de deux vecteurs orthogonaux et de même norme.

#### Exemple 10.1

Les deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  de la figure ci-contre forment la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ .



#### Définition 10.4

Dire que les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  sont  $\vec{u}(x ; y)$  signifie que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

#### Exemple 10.2

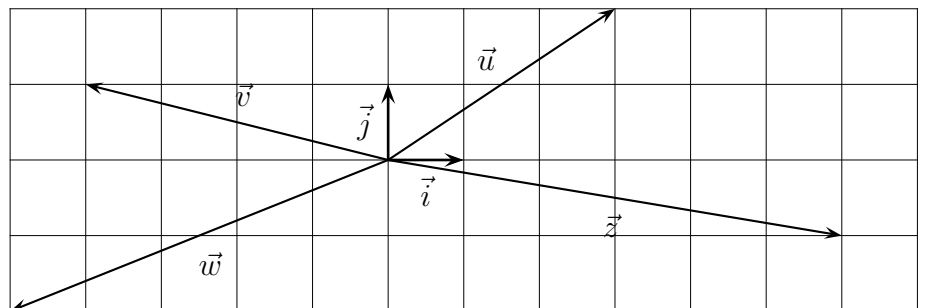
Ci-dessous, 4 vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ , et leurs coordonnées dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \quad \vec{u}(3 ; 2)$$

$$\vec{v} = -4\vec{i} + 1\vec{j} \quad \vec{v}(-4 ; 1)$$

$$\vec{w} = -5\vec{i} - 2\vec{j} \quad \vec{w}(-5 ; -2)$$

$$\vec{z} = 6\vec{i} - 1\vec{j} \quad \vec{z}(6 ; -1)$$



### 10.2 Coordonnées de la somme de vecteurs

#### Propriété 10.1 (Coordonnées de la somme de deux vecteurs)

Pour deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de coordonnées  $\vec{u}(x ; y)$  et  $\vec{v}(x' ; y')$  les coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  sont  $(x + x' ; y + y')$ .

#### Exemple 10.3

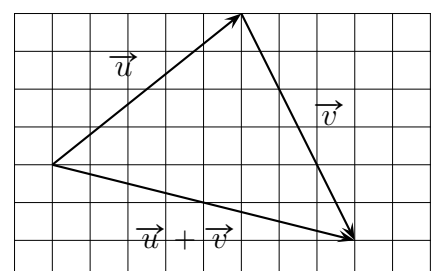
Dans la figure ci-contre, les coordonnées de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont :

$$\vec{u}(5 ; 4) \quad \text{et} \quad \vec{v}(3 ; -6)$$

Calcul des coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  :

$$5 + 3 = 8 \quad 4 + (-6) = -2$$

Les coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  sont donc  $\vec{u} + \vec{v}(8 ; -2)$



### 10.3 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel, colinéarité

#### Propriété 10.2

Pour un vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x ; y)$ , les coordonnées du vecteur  $k\vec{u}$  sont  $(kx ; ky)$ .

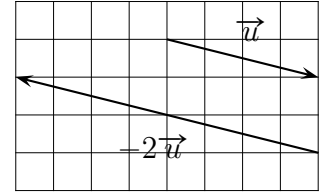
#### Exemple 10.4

Dans la figure ci-contre, les coordonnées de  $\vec{u}$  sont  $\vec{u} (4 ; -1)$

Calcul des coordonnées du vecteur  $-2\vec{u}$  :

$$(-2) \times 4 = -8 \quad (-2) \times (-1) = 2$$

Les coordonnées du vecteur  $-2\vec{u}$  sont donc  $-2\vec{u} (-8 ; 2)$



#### Définition 10.5 (Déterminant de deux vecteurs du plan)

Pour deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de coordonnées  $\vec{u}(x ; y)$  et  $\vec{v}(x' ; y')$ , le déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre  $xy' - x'y$ .

$$\begin{matrix} \vec{u} & (x & ; & y) \\ \vec{v} & (x' & ; & y') \end{matrix}$$

#### Propriété 10.3 (Déterminant de 2 vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

#### Démonstration

Pour deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de coordonnées  $\vec{u}(x ; y)$  et  $\vec{v}(x' ; y')$ , on sait qu'ils sont colinéaires si il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

On a donc :  $x' = kx$  et  $y' = ky$ .

Calculons maintenant le déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$x \times y' - x' \times y = x \times ky - kx \times y = kxy - kxy = 0$$

Ce déterminant est bien égal à zéro.

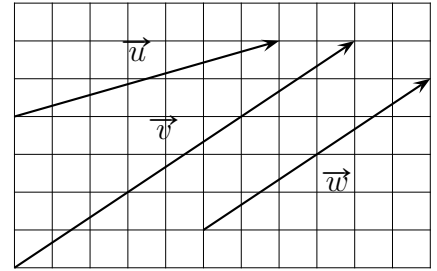
#### Remarque 10.1 (Déterminant nul et produits en croix)

Pour deux vecteurs  $\vec{u}(x ; y)$  et  $\vec{v}(x' ; y')$ , qui sont colinéaires, le tableau ci-dessous formé par leur coordonnées est un tableau de proportionnalité, et on sait qu'alors les produits en croix sont égaux, autrement dit :  $xy' = x'y$  par conséquent, on retrouve bien :  $xy' - x'y = 0$

$$\begin{matrix} \vec{u} & (x & ; & y) \\ \vec{v} & (x' & ; & y') \end{matrix}$$

**Exemple 10.5 (Justifier, avec des coordonnées, si des vecteurs sont colinéaires.)**

Dans la figure ci-contre, les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  ont pour coordonnées  $\vec{u} (7 ; 2)$ ,  $\vec{v} (9 ; 6)$ ,  $\vec{w} (6 ; 4)$



Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils colinéaires ?

$$\begin{matrix} \vec{u} & (7 & ; & 2) \\ \vec{v} & (9 & ; & 6) \end{matrix}$$

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs.

$7 \times 6 - 9 \times 2 = 42 - 18 = 24 \neq 0$  Le déterminant est non nul, donc les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont-ils colinéaires ?

$$\begin{matrix} \vec{v} & (9 & ; & 6) \\ \vec{w} & (6 & ; & 4) \end{matrix}$$

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs.

$9 \times 4 - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0$  Le déterminant est nul, donc les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires.

### 10.4 Calculer la norme d'un vecteur

**Propriété 10.4**

Pour un vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x ; y)$  dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ , sa norme s'écrit  $\|\vec{u}\|$ , et on a :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

### 10.5 Coordonnées de points et de vecteurs

**Définition 10.6 (Repère orthonormé)**

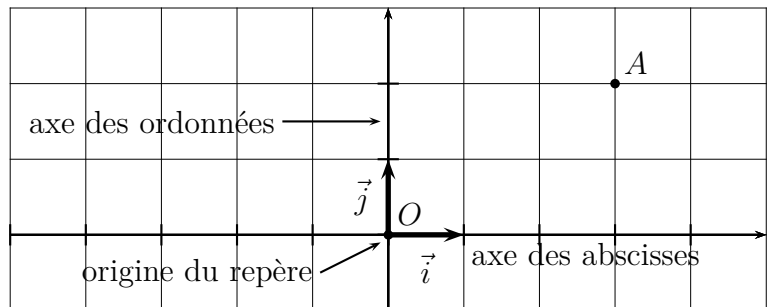
Pour un point  $O$  et deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , dire que  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé signifie que  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée.

**Exemple 10.6 (Vocabulaire : coordonnées, abscisse, ordonnée, origine)**

Les **coordonnées** du point  $A$  dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  sont 3 et 2, et on écrit :

$$A(3 ; 2)$$

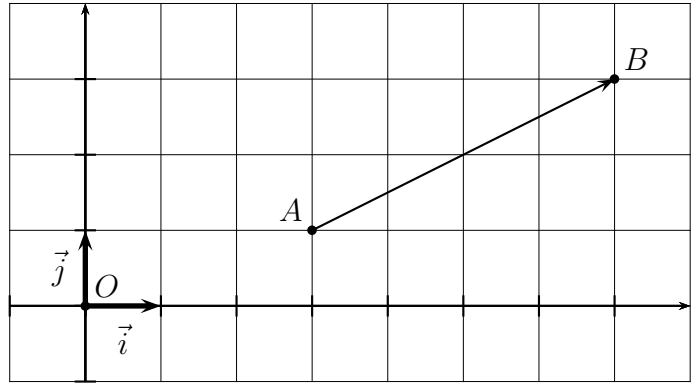
- L'**abscisse** de  $A$  est 3
- l'**ordonnée** de  $A$  est 2.



**Exemple 10.7**

Dans la figure ci-contre, le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  est orthonormé.

- Les coordonnées des points  $A$  et  $B$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  sont :  $A(3 ; 1)$  et  $B(7 ; 3)$ .
- Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  sont :  $\overrightarrow{AB}(4 ; 2)$ .



**Propriété 10.5 (Coordonnées d'un vecteur dans un repère)**

Pour deux points  $A$  et  $B$  de coordonnées  $(x_A ; y_A)$  et  $(x_B ; y_B)$  dans un repère du plan, les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ .

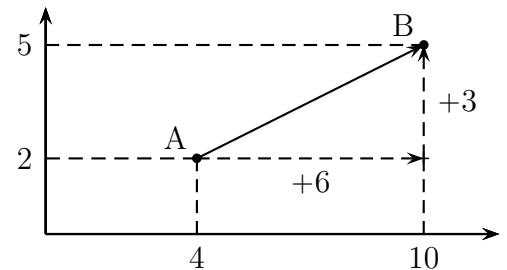
**Exemple 10.8 (Calculer des coordonnées de vecteur)**

Dans le repère ci-contre, les coordonnées de  $A$  et  $B$  sont  $A(4 ; 2)$  et  $B(10 ; 5)$ .

Calcul des coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :

$$x_B - x_A = 10 - 4 = 6 \quad y_B - y_A = 5 - 2 = 3$$

Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont donc  $\overrightarrow{AB}(6 ; 3)$



**10.6 Alignement et parallélisme**

**Rappel du chapitre 4 (Vecteurs)**

- Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles, si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.
- Trois points  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

**Méthode 10.1 (Parallélisme)**

Pour savoir si deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles,

- on calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ;
- on calcule le déterminant des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ;
- si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires, les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles sinon, elles ne sont pas parallèles.

**Méthode 10.2 (Alignement)**

Pour savoir si trois points  $A, B, C$  sont alignés

- on calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ;
- on calcule le déterminant des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ;
- si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, les points  $A, B, C$  sont alignés, sinon, ils ne sont pas alignés.

### 10.7 Distance

La distance entre deux points  $A$  et  $B$  est la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :  $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ .

Or les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont  $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ .

On sait aussi que dans une base orthonormée, la norme d'un vecteur  $\vec{u}(x ; y)$  est :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

On obtient donc la propriété ci-dessous.

#### Propriété 10.6

Pour deux points de coordonnées  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  dans un repère orthonormé du plan, on a l'égalité :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

#### Exemple 10.9

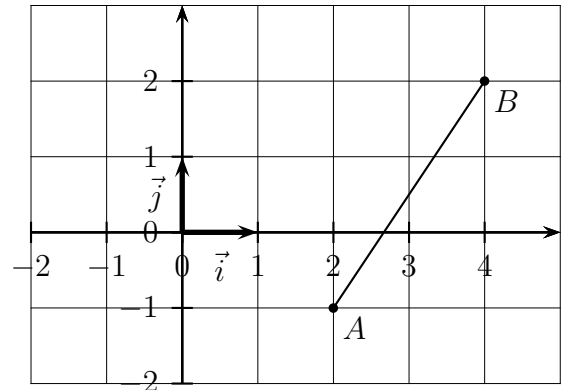
Les coordonnées des points  $A$  et  $B$  dans le repère orthonormé ci-dessous sont  $A(2 ; -1)$  et  $B(4 ; 2)$ .

Calculons la distance  $AB$ .

$$x_A = 2 \quad y_A = -1 \quad x_B = 4 \quad y_B = 2$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (2 + 1)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{4 + 9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

donc :  $AB = \sqrt{13}$



### 10.8 Coordonnées du milieu d'un segment

#### Propriété 10.7

Dans un repère du plan, pour deux points  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$ , les coordonnées du milieu du segment  $[AB]$  sont :  $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .

#### Exemple 10.10

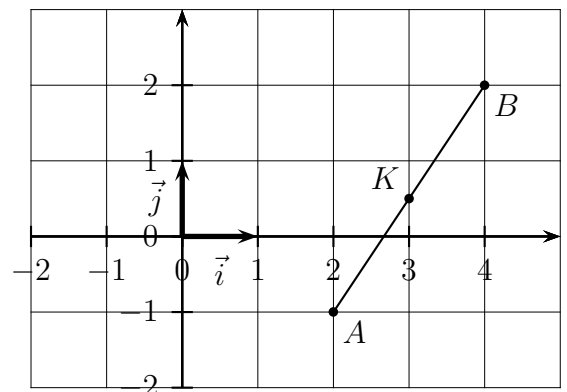
Les coordonnées des points  $A$  et  $B$  dans le repère orthonormé ci-dessous sont  $A(2 ; -1)$  et  $B(4 ; 2)$ .

Calculons les coordonnées du point  $K$  milieu du segment  $[AB]$ .

$$x_A = 2 \quad y_A = -1 \quad x_B = 4 \quad y_B = 2$$

$$\frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \frac{(-1) + 2}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Donc les coordonnées de  $K$  sont :  $K(3 ; 0,5)$ .



# 11 Évolution

## 11.0 Programme

### 11.0.a Collège

Le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur font partie des programmes de collège.

### 11.0.b Classe de seconde

#### Contenus

- Évolution : variation absolue, variation relative.
- Évolutions successives, évolution réciproque : relation sur les coefficients multiplicateurs.

#### Capacités attendues

- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs.
- Calculer un taux d'évolution réciproque.

## 11.1 Vocabulaire

Le mot *évolution* désigne l'évolution d'une quantité, par exemples :

- un prix qui augmente ou qui diminue
- une population qui augmente ou qui diminue
- la taille d'un arbre qui augmente
- le volume d'eau dans une citerne qui augmente ou qui diminue
- etc.

## 11.2 Appliquer un taux d'évolution – Coefficient multiplicateur

### Exemple 11.1

Un article coûte 62 € et augmente de 7 %. Calculer son prix final c'est à dire son prix après augmentation.

Le taux d'évolution est :  $\frac{7}{100} = 0,07$

L'augmentation est égale à :  $62 \times 0,07 = 4,34$  €

Le prix final est égal à :  $62 + 4,34 = 66,34$  €

Reprenons le calcul du prix final en une seule suite de calculs :

$$62 + 62 \times 0,07 = 62 \times 1 + 62 \times 0,07 = 62 \times (1 + 0,07) = 62 \times 1,07$$

Le nombre  $1 + 0,07 = 1,07$  est appelé le coefficient multiplicateur.

Schéma :  $62 \xrightarrow{\times(1 + 0,07)} 66,34$

### Propriété 11.1

Une quantité évolue d'une valeur initiale  $V_I$  à une valeur finale  $V_F$  avec un taux d'évolution  $t$ .

Alors :  $V_F = V_I \times (1 + t)$ . Schéma :  $V_I \xrightarrow{\times(1 + t)} V_F$



**Démonstration**

La valeur finale est égale à la valeur initiale + l'augmentation ou la diminution.

Or, cette augmentation ou cette diminution est égale à Valeur initiale  $\times$  Taux d'évolution.

On a donc :  $V_F = V_I + V_I \times t = V_I \times 1 + V_I \times t = V_I \times (1 + t)$ .

**Définition 11.1 (Coefficient multiplicateur)**

Pour un taux d'évolution  $t$ , le coefficient multiplicateur est égal à  $1 + t$ .

**Exemple 11.2**

Le volume d'eau dans une citerne était de 15 000 L et son volume a baissé de 20 %.

Calculer le volume final.

Le taux d'évolution est négatif parce que c'est une baisse :  $t = -20 \% = -\frac{20}{100} = -0,2$ .

Le coefficient multiplicateur est :  $1 + t = 1 + (-0,2) = 1 - 0,2 = 0,8$ .

Le volume final est égal à :  $15\,000 \times 0,8 = \boxed{12\,000 \text{ L}}$ .

**Propriété 11.2 (Lien entre le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur)**
$$CM = 1 + t \iff t = CM - 1$$
**Exemple 11.3**

- Une quantité augmente et elle est multipliée par 1,07.  
Son taux d'évolution est alors :  $1,07 - 1 = 0,07 = 7 \%$ .
- Une quantité diminue et elle est multipliée par 0,84.  
Son taux d'évolution est alors :  $0,84 - 1 = -0,16 = -16 \%$ .

## 11.3 Évolution – Variation absolue et relative

### 11.3.a Variation absolue

L'expression *variation absolue* désigne une augmentation ou une diminution.

**Définition 11.2**

Une quantité passe d'une valeur initiale à une valeur finale.

**Variation absolue = valeur finale – valeur initiale =  $V_F - V_I$ .**

**Exemple 11.4 (Augmentation d'un prix)**

Un article coûtait 54 €, et coûte maintenant 57 €.

L'évolution du prix est une augmentation.

La variation absolue est :  $57 - 54 = 3 \text{ €}$ .

**Exemple 11.5 (Baisse de population)**

La population d'une ville est passée de 8 300 habitants à 7 900 habitants.

L'évolution de la population est une diminution.

La variation absolue est :  $7\,900 - 8\,300 = -400$  habitants.

**11.3.b Variation relative**

La variation relative est la proportion de la variation absolue par rapport à la valeur initiale.

On a donc :  $\text{variation relative} = \frac{\text{variation absolue}}{\text{valeur initiale}} = \frac{V_F - V_I}{V_I}$

La variation absolue est l'augmentation ou la diminution, et quand on connaît la valeur initiale  $V_I$  et le taux d'évolution  $t$  on calcule la variation absolue en multipliant la valeur initiale par le taux, autrement dit :  $\text{variation absolue} = V_I \times t$

Donc :  $\text{Variation relative} = \frac{\text{variation absolue}}{\text{valeur initiale}} = \frac{V_I \times t}{V_I} = t$

Cette variation relative est donc égale au taux d'évolution. On donne donc la définition ci-dessous.

**Définition 11.3 (Taux d'évolution ou variation relative)**

Une quantité passe d'une valeur initiale à une valeur finale.  
**Taux d'évolution** =  $\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{V_F - V_I}{V_I}$

**Remarque 11.1**

La valeur initiale et la valeur finale sont parfois notées  $V_0$  et  $V_1$ , ou bien quantité 1 et quantité 2 ( $Q_1$  et  $Q_2$ ). On dit aussi parfois valeur de départ  $V_D$  et valeur d'arrivée  $V_A$ .

La formule du taux d'évolution peut donc être écrite de différentes manières :

$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$  ou  $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$  ou  $t = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$  etc.

**Exemple 11.6**

- Un premier article passe 40 à 42 €;
- un deuxième article coûtait 120 € et il est soldé à 102 €.

**1. Variations absolues**

1<sup>er</sup> article :  $V_F - V_I = 42 - 40 = \boxed{2 \text{ €}}$       2<sup>e</sup> article :  $V_F - V_I = 102 - 120 = \boxed{-18 \text{ €}}$ .

**2. Variations relatives ou taux d'évolution**

- 1<sup>er</sup> article :  $t_1 = \frac{42 - 40}{40} = 0,05 = \frac{5}{100} = \boxed{5 \text{ \%}}$
- 2<sup>e</sup> article :  $t_2 = \frac{102 - 120}{120} = -\frac{18}{120} = -0,15 = -\frac{15}{100} = \boxed{-15 \text{ \%}}$

**11.4 Évolutions successives**

**Propriété 11.3**

Si une quantité subit une 1<sup>re</sup> évolution de taux  $t_1$ , puis une 2<sup>e</sup> évolution de taux  $t_2$ , cette quantité est multipliée par  $(1 + t_1)(1 + t_2)$ .

Schéma :

$$V_0 \xrightarrow{\times(1+t_1)} V_1 \xrightarrow{\times(1+t_2)} V_2$$

$\xrightarrow{\times(1+t_1)(1+t_2)}$

**Exemple 11.7**

Un article qui coûte 70 € a beaucoup de succès, et son prix subit une hausse de 20 % puis une hausse de 40 %. Calculer le prix final.

La valeur initiale est :  $V_0 = 70$ .

**Calcul en deux étapes**

Le prix après la première hausse est :  $V_1 = V_0 \times (1 + t_1) = 70 \times (1 + 0,20) = 84$

Le prix après la deuxième hausse est :  $V_2 = V_1 \times (1 + t_2) = 84 \times (1 + 0,40) = 117,60$

**Calcul en une seule suite de calculs.**

$V_2 = V_0 \times (1 + t_1) \times (1 + t_2) = 70 \times (1 + 0,20) \times (1 + 0,40) = 70 \times 1,2 \times 1,4 = 117,60$

Le prix final est  $\boxed{117,60 \text{ €}}$ .

**Exemple 11.8**

Une action en bourse coûte 60 € subit une hausse de 30 % puis une baisse de 20 %. Calculer le prix final en une seule suite de calculs.

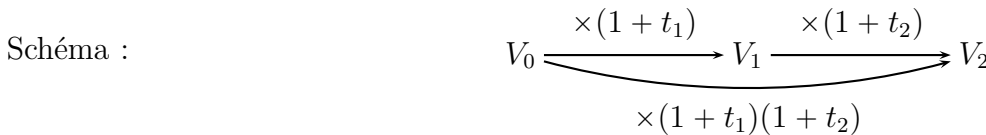
La valeur initiale est :  $V_0 = 40$ .

$V_2 = V_0 \times (1 + t_1) \times (1 + t_2) = 60 \times (1 + 0,30) \times (1 - 0,20) = 60 \times 1,3 \times 0,8 = 62,4$

Le prix final est  $\boxed{62,40 \text{ €}}$ .

**Définition 11.4 (Taux d'évolution global, et coefficient multiplicateur global)**

Une quantité subit une 1<sup>re</sup> évolution de taux  $t_1$ , puis une 2<sup>e</sup> évolution de taux  $t_2$ .



- Le **taux d'évolution global** est le taux de l'évolution de la valeur initiale  $V_0$  à la valeur finale  $V_2$ .
- Le **coefficient multiplicateur global** est le coefficient multiplicateur de la valeur initiale  $V_0$  à la valeur finale  $V_2$ , il est égal à  $(1 + t_1)(1 + t_2)$ .

**Méthode 11.1 (Calcul du taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs.)**

Une quantité subit une 1<sup>re</sup> évolution de taux  $t_1$ , puis une 2<sup>e</sup> évolution de taux  $t_2$ .

Comment calculer le taux global ?

- On calcule le coefficient multiplicateur global :  $CM_{\text{global}} = (1 + t_1)(1 + t_2)$ .
- On calcule le taux global  $T$  :  $T = CM_{\text{global}} - 1$ .

**Exemple 11.9**

Reprenons l'exemple 11.7.

Un article subit une hausse de 20 % puis une hausse de 40 %.

Calculer le taux global de hausse.

$$t_1 = \frac{20}{100} = 0,2 \quad t_2 = \frac{40}{100} = 0,4$$

- On calcule le coefficient multiplicateur global :  
 $CM_{\text{global}} = (1 + t_1)(1 + t_2) = (1 + 0,2)(1 + 0,4) = 1,68$ .
- On calcule le taux global  $T$  :  $T = CM_{\text{global}} - 1 = 1,68 - 1 = 0,68 = \frac{68}{100}$ .

Le taux global est :  $\boxed{t = 68 \%}$ .

**Exemple 11.10**

Une action en bourse subit une hausse de 23 % puis une baisse de 20 %.

1. Calculer le taux global.
  2. L'évolution globale est-elle une baisse ou une hausse ?
1. Calcul du taux global.

$$t_1 = \frac{23}{100} = 0,23 \quad t_2 = -\frac{20}{100} = -0,2$$

- On calcule le coefficient multiplicateur global :  
 $CM_{\text{global}} = (1 + t_1)(1 + t_2) = (1 + 0,23)(1 - 0,2) = 0,984.$
- On calcule le taux global  $T$  :  $T = CM_{\text{global}} - 1 = 0,984 - 1 = -0,016 = -\frac{1,6}{100}.$

Le taux global est :  $t = -1,6 \%$ .

2. L'évolution globale est-elle une baisse ou une hausse ?  
 L'évolution globale est  $\text{une baisse de } 1,6 \%$ .

**11.5 Évolution réciproque**

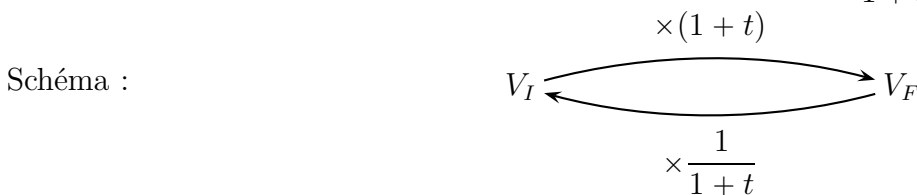
**Définition 11.5**

Une quantité évolue d'une valeur initiale  $V_I$  à une valeur finale  $V_F$ .  
 L'évolution réciproque de cette évolution est l'évolution de la valeur finale  $V_F$  à la valeur initiale  $V_I$ .



**Propriété 11.4**

Si une quantité subit une évolution de taux  $t$ ,  
 alors le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est  $\frac{1}{1+t}$ .



**Méthode 11.2 (Calcul du taux d'évolution réciproque.)**

Une quantité subit une évolution de taux  $t$ .  
 Comment calculer le taux d'évolution réciproque ?

- On calcule le coefficient multiplicateur réciproque :  $CM_{\text{réciproque}} = \frac{1}{1+t}.$
- On calcule le taux de l'évolution réciproque :  $t' = CM_{\text{réciproque}} - 1.$

**Exemple 11.11**

Le patron d'un cinéma était très satisfait parce que la fréquentation de son cinéma avait augmenté de 25 %.

Malheureusement la fréquentation a ensuite baissé et elle est revenue à la fréquentation initiale.  
 Calculer ce pourcentage de baisse.

- On calcule le coefficient multiplicateur réciproque :  $CM_{\text{réciproque}} = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+0,25} = 0,8$ .
- On calcule le taux de l'évolution réciproque :  $t' = CM_{\text{réciproque}} - 1 = 0,8 - 1 = -0,20 = -\frac{20}{100}$ .

Le pourcentage de baisse est égal à  $\boxed{-20 \%}$

## 12 Droites du plan

### 12.0 Programme

#### Contenus

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

#### Capacités attendues

- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- Établir que trois points sont alignés ou non.
- Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.
- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Déterminer une équation de droite à partir d'un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.

#### Démonstrations

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

#### Exemple d'algorithme

- Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
- Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

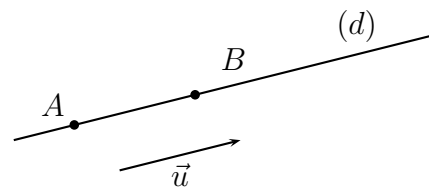
#### Approfondissements possibles

- Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.

### 12.1 Vecteur directeur d'une droite.

#### Définition 12.1

Dire qu'un vecteur non nul  $\vec{u}$  est vecteur directeur d'une droite  $(d)$  signifie qu'il existe deux points  $A$  et  $B$  de la droite  $(d)$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

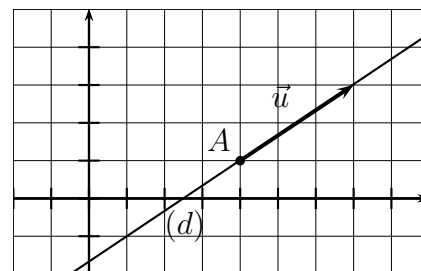


#### Exemple 12.1 (Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.)

Dans un repère, placer le point  $A(4 ; 1)$  et tracer la droite  $(d)$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3 ; 2)$ .

Sur la figure ci-contre,

- on place le point  $A(4 ; 1)$  ;
- on trace le vecteur  $\vec{u}$  à partir du point  $A$  ;
- on trace la droite  $(d)$ .

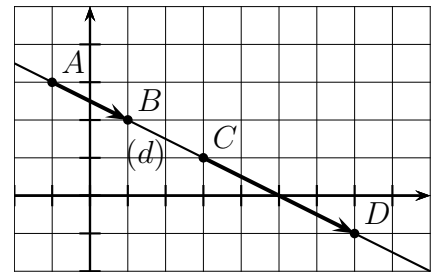


**Exemple 12.2 (Vecteur directeur d'une droite donnée par une représentation graphique.)**

Déterminer un vecteur directeur de la droite  $(d)$  tracée ci-contre.

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$   $(2 ; -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $(d)$ .

On peut aussi prendre  $\overrightarrow{CD}$   $(4 ; -2)$ .



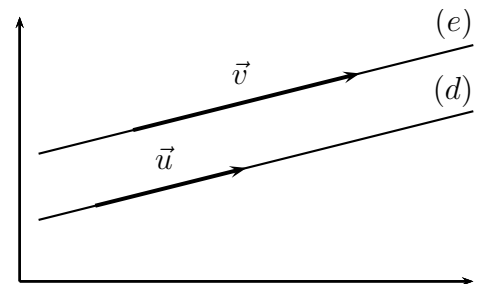
On a déjà vu aux chapitres 2 et 10 que deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires, autrement dit on a la propriété ci-dessous.

**Propriété 12.1 (Vecteurs directeurs de deux droites parallèles)**

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

**Exemple 12.3**

Sur la figure ci-contre, les droites  $(d)$  et  $(e)$  sont parallèles et leurs vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.



**12.2 Équation cartésienne d'une droite**

**Propriété 12.2**

Dans un repère du plan, toute droite a une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  où les nombres  $a$  et  $b$  ne sont pas tous les deux égaux à zéro.

**Définition 12.2**

Une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  s'appelle une équation cartésienne.

**Propriété 12.3**

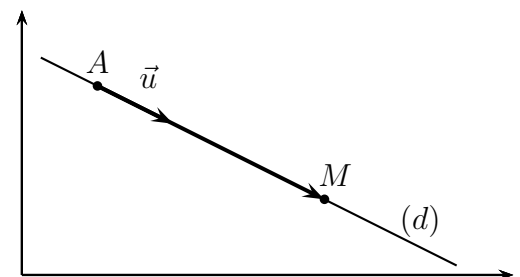
Dans un repère du plan, une droite d'équation  $ax + by + c = 0$  a un vecteur directeur  $\vec{u}$  de coordonnées  $\vec{u}(-b ; a)$ .

**Démonstration des propriétés 12.2 et 12.3**

Dans un repère du plan, dire qu'un point  $M(x ; y)$  appartient à une droite  $(d)$  passant par un point  $A(x_A ; y_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha ; \beta)$  signifie que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.

Les coordonnées de  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont :

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AM} & (x - x_A & ; & y - y_A) \\ \vec{u} & (\alpha & ; & \beta) \end{matrix}$$



Le déterminant des vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  est donc égal à :  $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A)$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires si et seulement si le déterminant des vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  est égal à zéro. On a donc :

$$\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0 \iff \beta x - \beta x_A - \alpha y + \alpha y_A = 0 \iff \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0 .$$

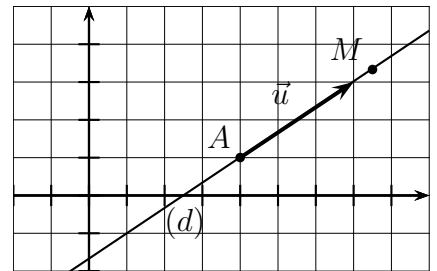
On obtient donc bien une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $a = \beta$ ,  $b = -\alpha$  et  $c = -\beta x_A + \alpha y_A$ .

Le vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha ; \beta)$  est un vecteur non nul, donc  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas tous les deux nuls, donc  $a$  et  $b$  ne sont pas tous les deux nuls.

Enfin pour les coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$  du vecteur directeur  $\vec{u}$ , on a  $a = \beta$  et  $b = -\alpha$ , par conséquent  $\alpha = -b$  et  $\beta = a$ , donc les coordonnées du vecteur directeur  $\vec{u}$  sont  $\vec{u}(-b ; a)$ .

### Exemple 12.4 (Équation de droite à partir d'un point et un vecteur directeur.)

Reprenons l'exemple 12.1, et calculons une équation cartésienne de la droite  $(d)$  passant par  $A(4 ; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3 ; 2)$ .



#### 1<sup>re</sup> méthode

Pour un point  $M(x ; y)$  de la droite  $(d)$  les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires, donc leur déterminant est nul.

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AM} \quad (x - 4 \quad ; \quad y - 1) \\ \vec{u} \quad \quad ( \quad 3 \quad ; \quad 2) \end{array}$$

$$2 \times (x - 4) - 3 \times (y - 1) = 0 \iff 2x - 8 - 3y + 3 = 0 \iff \boxed{2x - 3y - 5 = 0}.$$

#### 2<sup>e</sup> méthode

On sait qu'une équation cartésienne de la droite  $(d)$  est de la forme  $ax + by + c = 0$  et qu'un vecteur directeur a comme coordonnées  $\vec{u}(-b ; a)$ .

Or, ici, on a :  $\vec{u}(3 ; 2)$ , donc,  $a = 2$  et  $b = -3$ , donc, on obtient l'équation :  $2x - 3y + c = 0$ .

Or les coordonnées du point  $A(4 ; 1)$  vérifient cette équation, donc :

$$2 \times 4 - 3 \times 1 + c = 0 \iff 5 + c = 0 \iff c = -5.$$

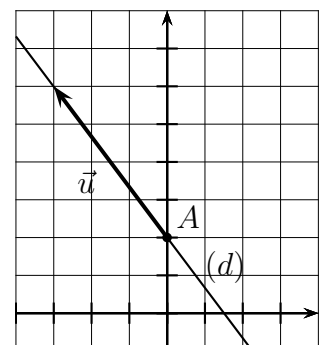
On obtient finalement :  $\boxed{2x - 3y - 5 = 0}$ .

### Exemple 12.5 (Tracer une droite connaissant son équation cartésienne (1))

On veut tracer la droite d'équation :  $4x + 3y - 6 = 0$ .

Il nous faut les coordonnées d'un point et les coordonnées d'un vecteur directeur.

- On choisit une valeur de  $x$  et on calcule  $y$ .  
Par exemple, choisissons  $x = 0$  :  
 $4 \times 0 + 3y - 6 = 0 \iff 3y - 6 = 0 \iff 3y = 0 + 6 = 6$   
 $\iff y = \frac{6}{3} = 2$   
On a donc les coordonnées d'un point  $A(0 ; 2)$ .
- D'après l'équation  $4x + 3y - 6 = 0$ , les coordonnées d'un vecteur directeur sont  $\vec{u}(-3 ; 4)$ .
- On trace le vecteur  $\vec{u}$  à partir du point  $A$ , et on trace la droite  $(d)$ .



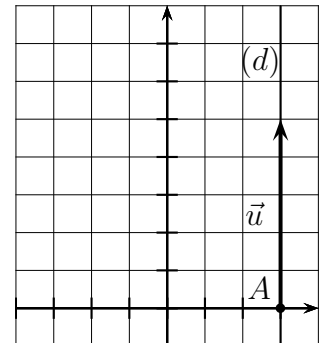


**Exemple 12.6 (Tracer une droite connaissant son équation cartésienne (2))**

On veut tracer la droite d'équation :  $5x - 15 = 0$ .

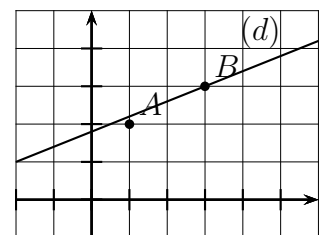
Il nous faut les coordonnées d'un point et les coordonnées d'un vecteur directeur.

- On résout l'équation  $5x - 15 = 0$ .  
 $5x - 15 = 0 \iff 5x = 15 \iff x = \frac{15}{5} = 3$   
 On place un point d'abscisse  $x = 3$ , par exemple  $A(3 ; 0)$ .
- D'après l'équation  $5x - 15 = 0$ , les coordonnées d'un vecteur directeur sont  $\vec{u}(0 ; 5)$ .
- On trace le vecteur  $\vec{u}$  à partir du point  $A$ , et on trace la droite  $(d)$ .

**Exemple 12.7 (Vérifier si un point appartient à une droite)**

Vérifions si les points  $A(1 ; 2)$  et  $B(3 ; 3)$  appartiennent à la droite d'équation  $-2x + 5y - 9 = 0$ .

- Point  $A$  :  $-2 \times 1 + 5 \times 2 - 9 = -1 \neq 0$  donc le point  $A$  n'appartient pas à la droite  $(d)$ .
- Point  $B$  :  $-2 \times 3 + 5 \times 3 - 9 = 0$  donc le point  $B$  appartient à la droite  $(d)$ .

**12.3 Équation réduite d'une droite****12.3.a Définition, propriété, et tracé****Propriété 12.4**

Dans un repère du plan,

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme  $x = k$ .
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme  $y = mx + p$ .

**Définition 12.3**

L'équation  $x = k$  pour une droite parallèle à l'axe des ordonnées, et l'équation  $y = mx + p$  pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées s'appellent **équation réduite** de la droite.

**Propriété 12.5**

Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation réduite  $y = mx + p$ , est la représentation graphique de la fonction affine définie par  $f(x) = mx + p$ .

**Propriété 12.6**

Pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées et son équation réduite  $y = mx + p$ ,

- le coefficient  $m$  s'appelle le coefficient directeur ou la pente de la droite ;
- le coefficient  $p$  s'appelle l'ordonnée à l'origine de la droite.

**Propriété 12.7**

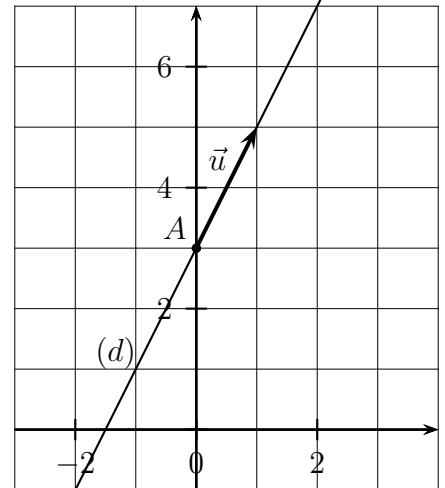
Pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation réduite  $y = mx + p$ , un vecteur directeur de cette droite est le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $\vec{u}(1 ; m)$ .

**Exemple 12.8 (Tracer une droite connaissant son équation réduite (1))**

Tracer la droite  $(d)$  d'équation  $y = 2x + 3$ .

**1<sup>re</sup> méthode : un point et un vecteur directeur.**

- On choisit une valeur de  $x$  et on calcule  $y$ .  
Par exemple, choisissons  $x = 0$  :  
 $y = 2 \times 0 + 3 = 3$ .  
On a donc les coordonnées d'un point :  $A(0 ; 3)$ .
- L'équation réduite est  $y = 2x + 3$ , et d'après la propriété 12.7, les coordonnées d'un vecteur directeur sont  $\vec{u}(1 ; 2)$ .
- On trace le vecteur  $\vec{u}$  à partir du point  $A$ , et on trace la droite  $(d)$ .

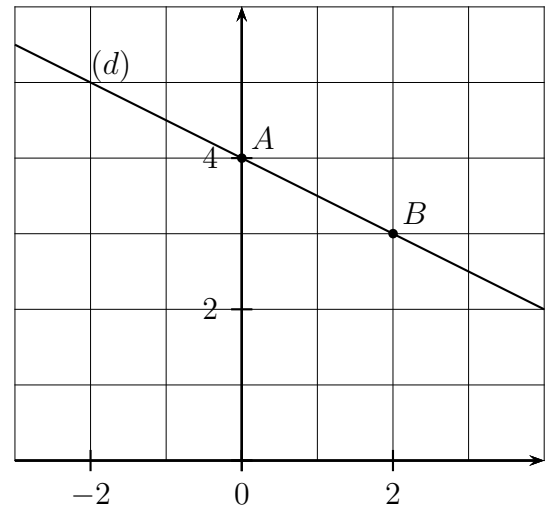


**Exemple 12.9 (Tracer une droite connaissant son équation réduite (2))**

Tracer la droite  $(d)$  d'équation  $y = -0,5x + 4$ .

**2<sup>e</sup> méthode : deux points.**

- On choisit deux valeurs de  $x$  et on calcule  $y$  chaque fois, et cela va nous donner les les coordonnées de deux points  $A$  et  $B$ .  
 $x = 0 \quad y = -0,5 \times 0 + 4 = 4 \quad A(0 ; 4)$   
 $x = 2 \quad y = -0,5 \times 2 + 4 = 3 \quad B(2 ; 3)$
- On place les points  $A$  et  $B$  et on trace la droite  $(AB)$  qui est la droite  $(d)$ .



**Remarque 12.1 (Tracer à la calculatrice une droite d'équation  $y = mx + p$ )**

La propriété 12.5 indique que la droite d'équation  $y = mx + p$  est la représentation graphique de la fonction affine définie par  $f(x) = mx + p$ .

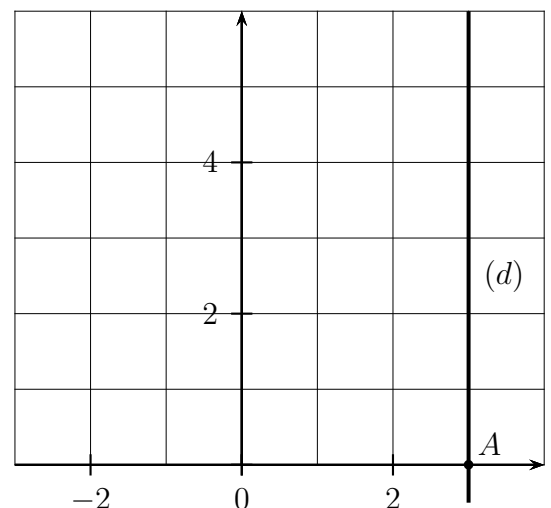
On peut donc vérifier les exemples 12.8 et 12.9 à la calculatrice.

**Exemple 12.10 (Tracer une droite connaissant son équation réduite (3))**

Tracer la droite  $(d)$  d'équation  $x = 3$ .

On sait que  $x = k$  est l'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe de ordonnées c'est à dire une droite verticale.

On place le point  $A$  de coordonnées  $A(3 ; 0)$  et on trace la droite verticale qui passe par ce point.



## 12.3.b Équation réduite et équation cartésienne

**Exemple 12.11 (Transformer une équation cartésienne en une équation réduite (1))**

Transformer l'équation cartésienne  $3x + 2y - 9 = 0$  en une équation réduite.

$$3x + 2y - 9 = 0 \iff 2y = -3x + 9 \iff y = \frac{-3x + 9}{2} \iff y = \frac{-3x}{2} + \frac{9}{2} \iff \boxed{y = -1,5x + 4,5}$$

**Exemple 12.12 (Transformer une équation cartésienne en une équation réduite (2))**

Transformer l'équation cartésienne  $5x - 8 = 0$  en une équation réduite.

$$5x - 8 = 0 \iff 5x = 8 \iff x = \frac{8}{5} \iff \boxed{x = 1,6}$$

**Exemple 12.13 (Transformer une équation réduite en une équation cartésienne (1))**

Transformer l'équation réduite  $y = 5x - 7$  en une équation cartésienne.

$$y = 5x - 7 \iff 5x - 7 = y \iff \boxed{5x - y - 7 = 0}$$

**Exemple 12.14 (Transformer une équation réduite en une équation cartésienne (2))**

Transformer l'équation réduite  $x = 6$  en une équation cartésienne.

$$x = 6 \iff \boxed{x - 6 = 0}$$

## 12.3.c Parallèles et sécantes

**Propriété 12.8**

- Deux droites d'équations  $x = k$  et  $x = k'$  sont parallèles.
- Deux droites d'équations  $x = k$  et  $y = mx + p$  sont sécantes.
- Deux droites d'équations  $y = mx + p$  et  $y = m'x + p'$  sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs  $m$  et  $m'$  sont égaux.

**Exemple 12.15 (Point d'intersection de deux droites sécantes (1).)**

Justifions que les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  d'équations réduites  $y = 3x - 2$  et  $y = -2x + 8$  sont sécantes et déterminons leur point d'intersection.

Les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont sécantes parce qu'elles n'ont pas le même coefficient directeur.

Nommons  $K$  le point d'intersection des droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$ , et calculons ses coordonnées.

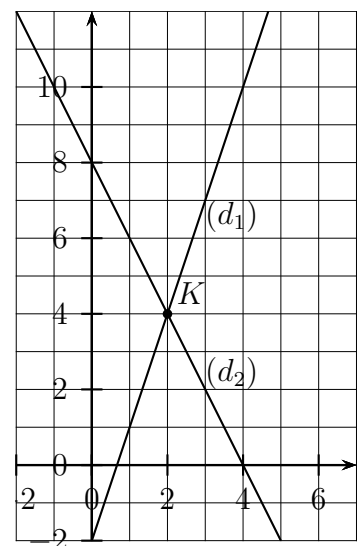
Le point  $K$  a des coordonnées  $(x ; y)$  qui vérifient à la fois les deux équations réduites de  $(d_1)$  et  $(d_2)$ .

On résout donc l'équation  $3x - 2 = -2x + 8$ .

$$\begin{aligned} 3x - 2 = -2x + 8 &\iff 3x + 2x = 8 + 2 \iff 5x = 10 \\ &\iff x = \frac{10}{5} \iff x = 2 \end{aligned}$$

Pour calculer  $y$ , on remplace  $x$  par sa valeur dans une des deux équations :  $y = 3x - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$ .

Donc les coordonnées du point  $K$  sont :  $\boxed{K(2 ; 4)}$ .



**Exemple 12.16 (Point d'intersection de deux droites sécantes (2).)**

Justifions que les droites  $(d_1)$  et  $(d_3)$  d'équations réduites  $y = 3x - 2$  et  $x = 4$  sont sécantes et déterminons leur point d'intersection.

Les droites  $(d_1)$  et  $(d_3)$  sont sécantes parce que deux droites d'équations  $x = k$  et  $y = mx + p$  sont sécantes.

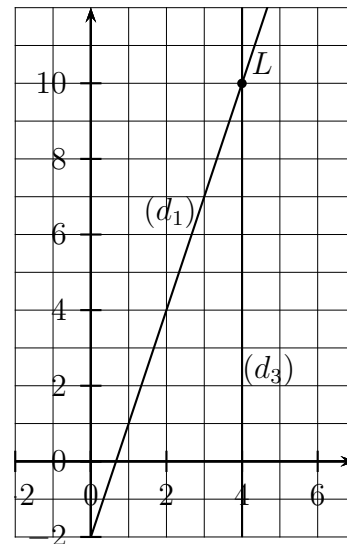
Nommons  $L$  le point d'intersection des droites  $(d_1)$  et  $(d_3)$ , et calculons ses coordonnées.

Le point  $L$  a des coordonnées  $(x ; y)$  qui vérifient à la fois les deux équations réduites de  $(d_1)$  et  $(d_3)$ .

Puisque  $L \in (d_3)$ , on a :  $x = 4$

Pour calculer  $y$ , on remplace  $x$  par sa valeur dans l'équation de  $d_1$  :  $y = 3x - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$ .

Donc les coordonnées du point  $L$  sont :  $L(4 ; 10)$ .



**12.3.d Déterminer une équation réduite de droite**

**Exemple 12.17 (Déterminer une équation de droite à partir d'un point et la pente.)**

Calculons l'équation réduite  $y = mx + p$  de la droite passant par  $A(-1 ; -2)$  et de pente 3.

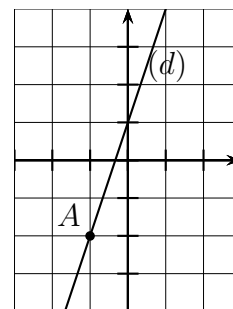
La pente est le coefficient directeur, donc  $m = 3$  par conséquent l'équation réduite est :  $y = 3x + p$ .

On sait que le point  $A$  appartient à cette droite, donc ses coordonnées vérifient l'équation réduite.

On a donc :

$$\begin{aligned} -2 = 3 \times (-1) + p &\iff -2 = -3 + p \iff -3 + p = -2 \\ &\iff p = -2 + 3 \iff p = 1 \end{aligned}$$

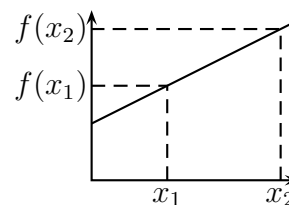
Donc, l'équation réduite est :  $y = 3x + 1$ .



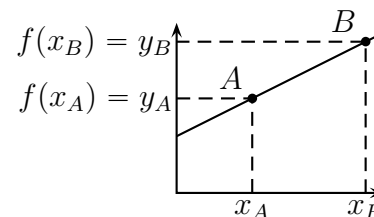
Dans le chapitre 6, la propriété 6.2 indiquait que pour deux nombres différents  $x_1$  et  $x_2$  et une fonction affine, définie par  $f(x) = mx + p$ ,

on a :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



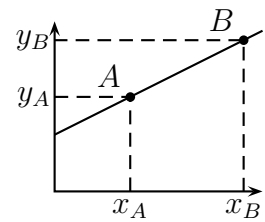
Donc pour deux points  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  et la droite  $(AB)$  d'équation réduite  $y = mx + p$ , on a  $m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ , or  $f(x_A) = y_A$  et  $f(x_B) = y_B$ .



On a donc la propriété page suivante.

**Propriété 12.9**

Pour une droite  $(AB)$  d'équation réduite  $y = mx + p$ , on a  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

**Exemple 12.18 (Déterminer une équation de droite à partir de deux points (1))**

Déterminons l'équation réduite de la droite  $(AB)$  pour les points  $A(2 ; 1)$  et  $B(3 ; 4)$ .

- Les deux points  $A$  et  $B$  n'ont pas la même abscisse, donc la droite  $(AB)$  n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc l'équation réduite de la droite  $(AB)$ , est sous la forme  $y = mx + p$ .

- Calcul du coefficient directeur  $m$  :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{3 - 2} = \frac{3}{1} = 3$$

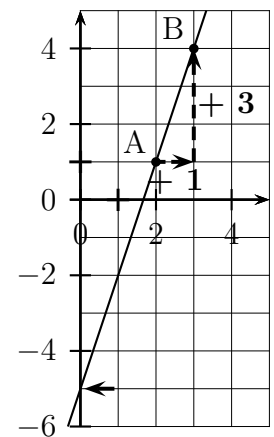
- L'équation réduite de la droite  $(AB)$  est donc :  $y = 3x + p$

- Calcul de l'ordonnée à l'origine  $p$  : on remplace  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $A(2 ; 1)$  dans l'équation  $y = 3x + p$  :

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \times 2 + p &\iff 3 \times 2 + p &= 1 \\ & &\iff 6 + p &= 1 \\ & &\iff p &= 1 - 6 = -5 \end{aligned}$$

- Donc l'équation réduite de la droite  $(AB)$  est :

$$y = 3x + (-5) \text{ soit } \boxed{y = 3x - 5}$$

**Vérification avec la calculatrice**

Avec la calculatrice Numworks, on peut obtenir l'équation réduite de cette droite.

Aller dans le module Régressions et compléter ainsi avec les coordonnées de  $A$  et  $B$  :

X1	Y1
2	1
3	4

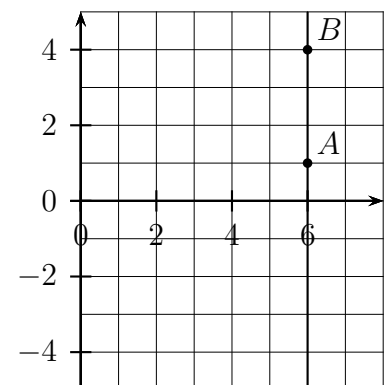
Aller sur l'onglet Graphique. Au bas de l'écran on lit :  $y=ax+b$        $a=3$        $b=-5$

On retrouve bien l'équation :  $y = 3x - 5$ .

**Exemple 12.19 (Déterminer une équation de droite à partir de deux points (2))**

Déterminons l'équation réduite de la droite  $(AB)$  pour les points  $A(6 ; 1)$  et  $B(6 ; 4)$ .

Les deux points  $A$  et  $B$  ont la même abscisse  $x = 6$ , donc la droite  $(AB)$  est parallèle à l'axe des ordonnées, par conséquent l'équation réduite de la droite  $(AB)$ , est  $\boxed{x = 6}$ .



## 13 Statistiques

### 13.0 Programme

#### 13.0.a Collège

##### Connaissances

- Effectifs, fréquences.
- Indicateurs de position : moyenne, médiane.
- Indicateur de dispersion : étendue.

##### Compétences associées

- Recueillir des données, les organiser.
- Lire et interpréter des données sous forme de données brutes, de tableau, de diagramme (diagramme en bâtons, diagramme circulaire, histogramme).
- Utiliser un tableur-grapheur pour présenter des données sous la forme d'un tableau ou d'un diagramme.
- Calculer des effectifs, des fréquences.
- Calculer et interpréter des indicateurs de position ou de dispersion d'une série statistique.

#### 13.0.b Classe de seconde

##### Contenus

- Indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée.
- Linéarité de la moyenne.
- Indicateurs de dispersion : écart interquartile, écart type.

##### Capacités attendues

- Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.
- Pour des données réelles ou issues d'une simulation, lire et comprendre une fonction écrite en Python renvoyant la moyenne  $m$ , l'écart type  $s$ , et la proportion d'éléments appartenant à  $[m - 2s, m + 2s]$ .

### 13.1 Série statistiques

#### Définition 13.1

Une série statistique est une série de nombres que l'on donne sous forme d'une liste de valeurs ou d'un tableau avec des effectifs.

#### Exemple 13.1

Dans une équipe de football, la série des âges des membres de l'équipe est donnée ci-dessous.

Âges en années	18	18	18	20	20	20	20	20	20	21	21
----------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

On peut donner cette série dans un tableau avec des effectifs.

Âges	18	20	21
Effectifs	3	6	2

## 13.2 Moyenne et écart-type

### Définition 13.2 (Moyenne simple)

La moyenne d'une série statistique est la somme des valeurs de cette série divisée par l'effectif total de cette série.

### Définition 13.3 (Moyenne pondérée)

Lorsqu'une série statistique est donnée par un tableau avec des effectifs, pour calculer sa moyenne,

- on multiplie chaque valeur par son effectif ;
- on ajoute ces produits ;
- on divise par l'effectif total de cette série.

### Exemple 13.2

Reprenons la série des âges des membres d'une équipe de football de l'exemple 13.1.

On peut calculer la moyenne  $m$  de deux façons :

$$\text{moyenne simple : } m = \frac{18 + 18 + 18 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 21 + 21}{11} = \frac{216}{11} \approx 19,6$$

$$\text{moyenne pondérée : } m = \frac{18 \times 3 + 20 \times 6 + 21 \times 2}{11} = \frac{216}{11} \approx 19,6$$

La moyenne d'âge de cette équipe est d' environ 19 ans et demi.

### Définition 13.4 (Écart-type)

Pour calculer l'écart-type d'une série statistique,

- on calcule la moyenne ;
- on calcule les écarts de chaque valeur avec la moyenne ;
- on met ces écarts au carré ;
- on calcule la moyenne de ces carrés ;
- on prend la racine carrée du résultat.

### Exemple 13.3 (Calcul détaillé d'un écart-type)

Reprenons la série des âges des membres d'une équipe de football de l'exemple 13.1.

Moyenne :  $m \approx 19,6$

Âge	Effectif	$(\hat{\text{Age}} - m)^2 \times \text{Effectif}$
18	3	8,03
20	6	0,79
21	2	3,72
Total	11	12,55

$$\text{Écart-type : } s = \sqrt{\frac{12,55}{11}} \approx 1,07$$

L'écart-type des âges de cette équipe est d' environ 1 an.

**Exemple 13.4 (Moyenne et écart-type à la calculatrice)**

Reprenons la série des âges des membres d'une équipe de football de l'exemple 13.1.

On peut saisir le tableau ci-contre à la calculatrice et obtenir la moyenne et l'écart-type.

Âge	Effectif
18	3
20	6
21	2

**Avec la calculatrice Numworks :**

- aller dans le module **Statistiques** ;
- dans l'onglet **Données**, saisir les valeurs (les âges) et les effectifs ;
- aller dans l'onglet **Stats**.

**Avec la TI Premium :**

- appuyer sur **stats** ;
- choisir **Modifier**, et valider ;
- saisir les valeurs (les âges) et les effectifs dans les colonnes L1 et L2 ;
- appuyer sur **stats** ;
- aller sur **CALC** ;
- choisir **Stats 1 Var**, valider ;
- compléter ainsi  
Xliste:L1  
ListeFréq:L2
- descendre sur **Calculer** et valider.
- La moyenne est  $\bar{x}$ , l'écart-type est  $\sigma_x$ .

**Propriété 13.1 (Utilité de la moyenne et de l'écart-type)**

- La moyenne d'une série statistique indique son niveau global.  
On dit que c'est un indicateur de position.
- L'écart-type d'une série statistique indique si les valeurs de la série sont groupées ou dispersées.  
On dit que c'est un indicateur de dispersion.

**Exemple 13.5 (Comparer deux séries statistiques avec moyenne et écart type)**

Rappelons la série des âges des membres d'une équipe de football de l'exemple 13.1.

Âge	Effectif
18	3
20	6
21	2

Pour cette série d'âges la moyenne et l'écart-type sont :  $m \approx 19,6$  et  $s \approx 1,1$ .

Considérons la série des âges des membres d'une 2<sup>e</sup> équipe de football, donnée par le tableau ci-dessous.

Âge	Effectif
17	4
20	5
25	2

Avec la calculatrice, on calcule la moyenne et l'écart-type et on obtient :  $m_2 \approx 19,8$  et  $s_2 \approx 2,8$ .

Comparons ces deux séries statistiques :

- les deux moyennes d'âges indiquent que les deux équipes ont globalement à peu près le même âge ;
- les deux écarts-types indiquent une plus grande dispersion des âges dans la 2<sup>e</sup> équipe.



### 13.3 Linéarité de la moyenne

#### Propriété 13.2

Pour une série statistique de moyenne  $m$ ,

- Si on multiplie toutes les valeurs de la série par le même nombre  $a$ , la moyenne de cette nouvelle série est  $a \times m$ .
- Si on ajoute le même nombre  $b$  à toutes les valeurs de la série, la moyenne de cette nouvelle série est  $m + b$ .

### 13.4 Médiane, quartiles, écart interquartile

#### Définition 13.5 (Médiane)

On range les valeurs d'une série statistique par ordre croissant.

La médiane est le nombre tel que la moitié des valeurs soient inférieures ou égale à la médiane.

#### Méthode 13.1 (Calcul de la médiane)

Pour calculer la médiane d'une série statistiques,

- on range cette série dans l'ordre croissant ;
- on calcule la moitié de l'effectif total ;
- on arrondit le résultat à l'entier supérieur  $r$  ;
- la médiane est la valeur de rang  $r$ .

#### Exemple 13.6

La série ci-dessous donne les poids de 16 bébés nés en quelques jours dans une maternité.

Ces poids sont rangés dans l'ordre croissant de 1 kg à 5 kg.

On calcule la moitié de l'effectif total :  $\frac{16}{2} = 8$

La médiane est la valeur de rang 8, c'est dire 3 kg.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Poids (kg)	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0

(Me)

#### Définition 13.6 (Quartiles)

On range les valeurs d'une série statistique par ordre croissant.

- Le 1<sup>er</sup> quartile  $Q_1$  est le nombre tel que le quart des valeurs soient inférieures ou égale à  $Q_1$ .
- Le 3<sup>e</sup> quartile  $Q_3$  est le nombre tel que trois quart des valeurs soient inférieures ou égale à  $Q_3$ .

#### Méthode 13.2 (Calculs des quartiles)

Pour calculer le premier quartile  $Q_1$  d'une série statistique,

- on range cette série dans l'ordre croissant ;
- on calcule le quart de l'effectif total ;
- on arrondit le résultat à l'entier supérieur  $r$  ;
- le premier quartile  $Q_1$  est la valeur de rang  $r$ .

Pour calculer le troisième quartile  $Q_3$  d'une série statistique, on procède comme pour  $Q_1$  avec trois quarts au lieu de un quart.

**Exemple 13.7**

On reprend l'exemple de la série des poids de 16 bébés nés dans une maternité. Ces poids sont rangés dans l'ordre croissant de 1 kg à 5 kg.

Premier quartile  $Q_1$  :

- on calcule le quart de l'effectif total :  $\frac{16}{4} = 4$  ;
- le premier quartile est la valeur de rang 4, donc :  $Q_1 = 1,5 \text{ kg}$ .

Troisième quartile  $Q_3$  :

- on calcule les trois quarts de l'effectif total :  $\frac{16 \times 3}{4} = 12$  ;
- le troisième quartile est la valeur de rang 12, donc :  $Q_3 = 3,5 \text{ kg}$ .

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Poids (kg)	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0

$Q_1$ 
Me
 $Q_3$

**Définition 13.7 (Écart interquartiles)**

L'écart interquartile d'une série statistique est égal à  $Q_3 - Q_1$ .

**Exemple 13.8 (Calcul d'écart interquartiles)**

On reprend l'exemple de la série des poids de 16 bébés nés dans une maternité.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Poids (kg)	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0

$Q_1$ 
Me
 $Q_3$

$Q_1 = 1,5$        $Q_3 = 3,5$       Écart interquartiles :  $Q_3 - Q_1 = 3,5 - 1,5 = 2$

**Exemple 13.9 (Médiane et quartiles à la calculatrice)**

On reprend l'exemple de la série des poids de 16 bébés nés dans une maternité.

Poids (kg)	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0
------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Cette série peut être donnée aussi par le tableau ci-dessous.

Poids (kg)	Effectifs
1,0	2
1,5	3
3,0	5
3,5	3
4,0	1
5,0	2

On peut alors saisir les données de ce tableau dans la calculatrice.

**Avec la calculatrice Numworks :**

- module Statistiques ;
- dans l'onglet Données on saisit le tableau ;
- résultats dans l'onglet Stats.

**Avec la TI Premium :**

- touche  $\boxed{\text{stats}}$  ;
- choisir Modifier, et valider ;
- saisir le tableau ;

- appuyer sur **stats** ;
- aller sur **CALC** ;
- choisir **Stats 1 Var**, valider ;
- compléter ainsi  
 $X_{\text{liste}}:L1$   
 $ListeFréq:L2$
- descendre sur **Calculer** et valider.
- dans le tableau de résultats, descendre jusqu'à **Q1, Méd, Q3**.

**Propriété 13.3 (Utilité de la médiane et des quartiles)**

- La médiane d'une série statistique indique son niveau global.  
C'est un indicateur de position.
- L'écart interquartile d'une série statistique indique si les valeurs de la série sont groupées ou dispersées.  
C'est un indicateur de dispersion.

**Exemple 13.10 (Comparer deux séries statistiques avec médiane et écart interquartile)**

Rappelons la série des poids de 16 bébés nés dans une maternité.

Poids (kg)	Effectifs
1,0	2
1,5	3
3,0	5
3,5	3
4,0	1
5,0	2

Pour cette série, rappelons la médiane, les quartiles, et l'écart interquartile :

$$\boxed{\text{Méd} = 3} \quad Q_1 = 1,5 \quad Q_3 = 3,5 \quad \boxed{Q_3 - Q_1 = 2}$$

Considérons la série des poids de 17 bébés nés dans cette maternité pendant une autre période, donnée par le tableau ci-dessous.

Poids (kg)	Effectifs
2,5	2
3,0	3
3,5	5
4,0	4
4,5	2
5,0	1

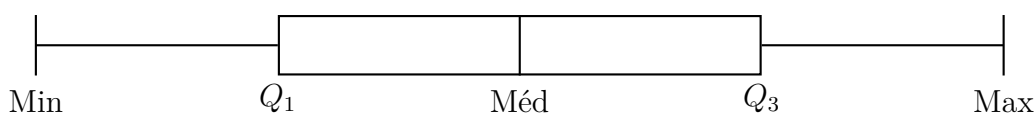
Avec la calculatrice, on obtient la médiane, les quartiles, et l'écart interquartile :

$$\boxed{\text{Méd} = 3,5} \quad Q_1 = 3 \quad Q_3 = 4 \quad \boxed{Q_3 - Q_1 = 1}$$

Comparons ces deux séries statistiques :

- les deux poids médians indiquent que les bébés du 2<sup>e</sup> groupe ont globalement un poids plus élevé ;
- les deux écart interquartiles indiquent une plus grande dispersion des poids dans le 1<sup>er</sup> groupe.

**Définition 13.8 (Diagramme en boîte)**



## 14 Probabilités

### 14.0 Programme

*L'ensemble des issues est fini.*

#### Contenus

- Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.
- Relation  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ .

#### Capacités attendues

- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

### 14.1 Univers et événement

#### Définition 14.1 (Expérience aléatoire et issue)

- Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats possibles et que l'on ne peut ni prévoir ni calculer lequel des résultats sera réalisé.
- Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés les issues de cette expérience aléatoire.

#### Exemple 14.1 (Exemples d'expériences aléatoires ou non)

- On lance un dé.
  - le fait de savoir si le dé va s'immobiliser ou pas n'est pas une expérience aléatoire, puisqu'on sait qu'il va s'immobiliser ;
  - le fait de connaître le numéro obtenu est une expérience aléatoire.
- On connaît les dimensions d'une armoire et les dimensions d'une pièce où on veut la placer :
  - on peut prévoir si on peut la faire passer par la porte ou la fenêtre, ce n'est pas aléatoire ;
  - quand elle est dans la pièce, pour savoir si on peut la tourner de différentes façons cela peut se calculer, ce n'est pas aléatoire.

#### Exemple 14.2 (Exemples d'expériences aléatoires et d'issues)

- On lance un dé. Les issues possibles sont : obtenir le 1, le 2, le 3, le 4, le 5, le 6.
- On lance une pièce de monnaie deux fois de suite et on note le résultat. Les issues possibles sont :  $\{P, P\}$ ,  $\{P, F\}$ ,  $\{F, P\}$ ,  $\{F, F\}$ .
- On choisit au hasard une élève ou un élève dans une classe de 30 élèves. Les issues possibles sont chacun des élèves de cette classe.

#### Définition 14.2 (Univers)

L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers  $\Omega$ .

#### Exemple 14.3 (Exemples d'univers)

- Lancer du dé :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- Lancer d'une pièce de monnaie deux fois de suite :  $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ .
- Élève choisi(e) au hasard dans une classe de 30 élèves :  $\Omega$  est l'ensemble des noms et prénoms des 30 élèves.

**Définition 14.3 (Événement)**

Un événement est une partie de l'univers d'une expérience aléatoire.

**Exemple 14.4 (Exemples d'événements)**

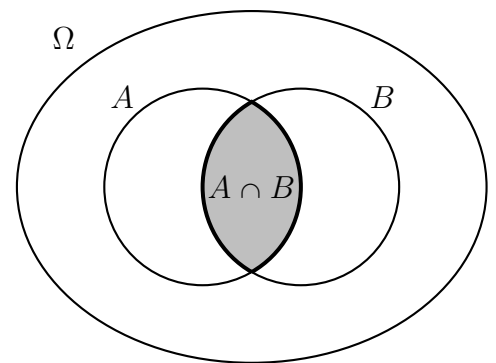
- Lancer du dé :  $A$  est l'événement « le nombre obtenu est pair », autrement dit,  $A = \{2, 4, 6\}$ .
- Lancer d'une pièce de monnaie deux fois de suite :  $B$  est l'événement « on obtient pile au 1<sup>er</sup> lancer », autrement dit,  $B = \{(P, P), (P, F)\}$ .
- Élève choisi(e) au hasard dans une classe de 30 élèves :  $C$  est l'événement « l'élève choisi(e) au hasard est une fille »

**Définition 14.4 (Événement certain et événement impossible)**

- L'événement certain est  $\Omega$ .
- L'événement impossible est noté  $\emptyset$ .

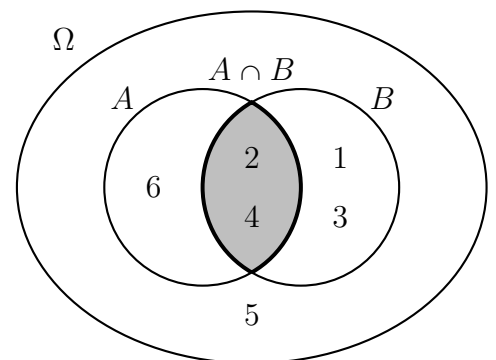
**Définition 14.5 (Intersection d'événements)**

L'intersection de deux événements  $A$  et  $B$  est l'événement tel que les deux événements  $A$  et  $B$  soient réalisés à la fois.  
Cet événement s'écrit  $A \cap B$  et se lit «  $A$  inter  $B$  » ou bien «  $A$  et  $B$  ».



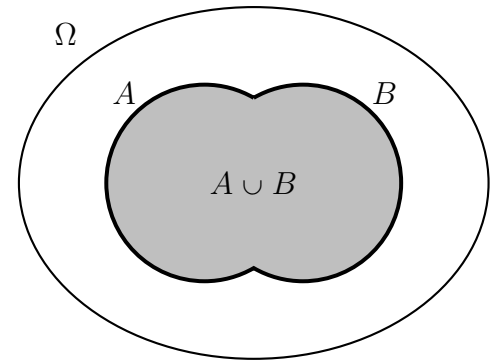
**Exemple 14.5 (Exemple d'intersection d'événements)**

On lance un dé et on note le nombre obtenu.  
 $A$  est l'événement « le nombre obtenu est pair », autrement dit,  $A = \{2, 4, 6\}$ .  
 $B$  est l'événement « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4 », autrement dit,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .  
 $A \cap B$  est l'événement « le nombre obtenu est pair **et** est inférieur ou égal à 4 », autrement dit,  $A \cap B = \{2, 4\}$ .



**Définition 14.6 (Réunion d'événements)**

La réunion de deux événements  $A$  et  $B$  est l'événement tel que l'événement  $A$  ou l'événement  $B$  ou les deux soient réalisés.  
 Cet événement s'écrit  $A \cup B$  et se lit «  $A$  union  $B$  » ou bien «  $A$  ou  $B$  ».

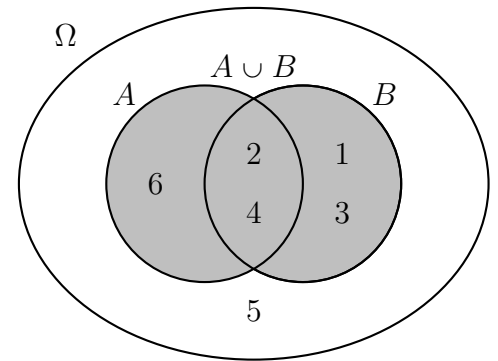


**Remarque 14.1 (La signification de « ou » en mathématiques)**

En mathématique et en logique, le mot « ou » signifie « l'un ou l'autre ou les deux ».

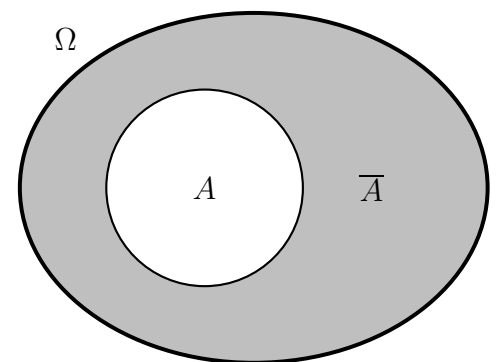
**Exemple 14.6 (Exemple de réunion d'événements)**

On lance un dé et on note le nombre obtenu.  
 $A$  est l'événement « le nombre obtenu est pair », autrement dit,  $A = \{2, 4, 6\}$ .  
 $B$  est l'événement « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4 », autrement dit,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .  
 $A \cup B$  est l'événement « le nombre obtenu est pair **ou** il est inférieur ou égal à 4, **ou** les deux » autrement dit,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .



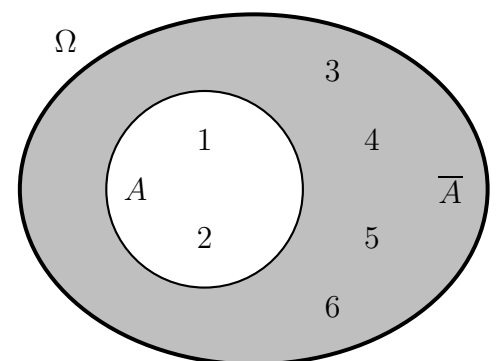
**Définition 14.7 (Événement complémentaire)**

L'événement complémentaire d'un événement  $A$  est l'événement tel que l'événement  $A$  ne soit pas réalisé.  
 Cet événement s'écrit  $\bar{A}$ .



**Exemple 14.7 (Exemple d'événement complémentaire)**

On lance un dé et on note le nombre obtenu.  
 $A$  est l'événement « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 2 », autrement dit,  $A = \{1, 2\}$ .  
 L'événement complémentaire  $\bar{A}$  est l'événement « le nombre obtenu est strictement supérieur à 2 », autrement dit,  $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ .



## 14.2 Probabilité

### Définition 14.8 (Loi de probabilité)

Une loi de probabilité sur un univers  $\Omega$  associe à chaque issue de l'épreuve aléatoire un nombre nommé probabilité, tel que

- ce nombre soit compris entre 0 et 1 ;
- la somme des probabilités des issues soit égale à 1.

### Définition 14.9 (Probabilité d'un événement)

La probabilité d'un événement  $A$  est la somme des probabilités des issues qui réalisent  $A$ .

### Propriété 14.1

Pour une loi de probabilité définie sur un univers  $\Omega$ ,  $p(\Omega) = 1$  et  $p(\emptyset) = 0$ .

### Définition 14.10 (Équiprobabilité)

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.

### Propriété 14.2

Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement  $A$  est donnée par :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de } A}{\text{Nombre d'issues de } \Omega}$$

### Exemple 14.8

On lance un dé et on note le nombre obtenu. Les issues possibles sont :  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ . Si le dé est équilibré, on suppose qu'il y a équiprobabilité, donc :

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

$A$  est l'événement « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 2 », autrement dit,  $A = \{1, 2\}$ .

Les issues qui réalisent l'événement  $A$  sont  $\{1\}$  et  $\{2\}$ , donc d'après la définition 14.9, on a :

$$p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Pour cet événement  $A$ , la propriété 14.2 donne le même résultat :

le nombre d'issues de  $A$  est 2, le nombre d'issues de  $\Omega$  est 6,  $p(A) = \frac{2}{6}$ .

### Propriété 14.3

Pour deux événements  $A$  et  $B$ , on a l'égalité :  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ .

### Exemple 14.9

On lance un dé et on note le nombre obtenu.

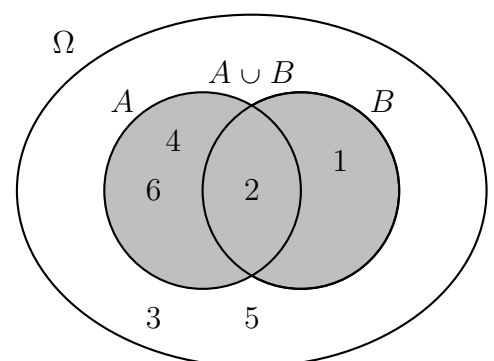
$A$  est l'événement « le nombre obtenu est pair », autrement dit,  $A = \{2, 4, 6\}$ .

$B$  est l'événement « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 2 », autrement dit,  $B = \{1, 2\}$ .

$$A \cap B = \{2\} \quad A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}.$$

$$p(A) = \frac{3}{6} \quad p(B) = \frac{2}{6}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{6} \quad p(A \cup B) = \frac{4}{6}$$



$$p(A) + p(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \quad p(A \cap B) + p(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

On a bien :  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

**Propriété 14.4**

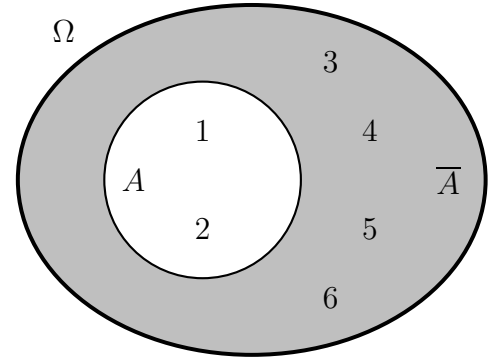
La probabilité de l'événement complémentaire d'un événement  $A$  est donnée par :  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

**Exemple 14.10**

On lance un dé et on note le nombre obtenu.  
 $A$  est l'événement « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 2 », autrement dit,  $A = \{1, 2\}$ .  
 L'événement complémentaire  $\bar{A}$  est l'événement « le nombre obtenu est strictement supérieur à 2 », autrement dit,  $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ .

$$p(A) = \frac{2}{6}$$

$$p(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$



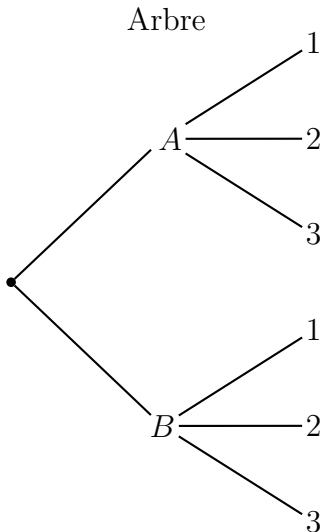
**14.3 Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres**

**Exemple 14.11**

Il y a deux boîtes : la première contient deux cartes marquées  $A$  et  $B$ , et la deuxième contient trois jetons numérotés 1, 2, 3.

On choisit une carte au hasard, puis un jeton au hasard, et on note les résultats.

On peut déterminer toutes les possibilités avec un arbre ou un tableau.



Tableau

	1	2	3
A	(A, 1)	(A, 2)	(A, 3)
B	(B, 1)	(B, 2)	(B, 3)

L'ensemble des possibilités est donc :  $\{ (A, 1), (A, 2), (A, 3), (B, 1), (B, 2), (B, 3) \}$



## 15 Systèmes de deux équations à deux inconnues

### 15.0 Programme

Capacité attendue : résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

### 15.1 Méthodes de résolution de systèmes du 1er degré à 2 inconnues

#### Exemple 15.1

Résolution du système  $\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

#### Résolution d'un système par combinaison linéaire

On effectue d'abord des calculs pour éliminer une des deux inconnues, afin de calculer l'autre inconnue.

Ci-dessous, on va éliminer  $y$  et calculer  $x$ .

$$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \times 3$$

$$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 6x + 3y = 24 \end{cases}$$


---


$$7x = 35$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{35}{7}$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

On remplace maintenant  $x$  dans une des deux équations et on calcule  $y$ .

$$x - 3y = 11$$

$$\Leftrightarrow 5 - 3y = 11$$

$$\Leftrightarrow -3y = 11 - 5$$

$$\Leftrightarrow -3y = 6$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6}{-3}$$

$$\Leftrightarrow y = -2$$

Le couple solution est donc :  $\boxed{(5 ; -2)}$

#### Résolution d'un système par substitution

$$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

On écrit une inconnue en fonction de l'autre.

Ici, on va écrire  $x$  en fonction de  $y$ .

$$x - 3y = 11$$

$$\Leftrightarrow x = 11 + 3y$$

On remplace maintenant  $x$  par  $11 + 3y$  dans la deuxième équation.

$$2x + y = 8$$

$$\Leftrightarrow 2 \times (11 + 3y) + y = 8$$

$$\Leftrightarrow 22 + 6y + y = 8$$

$$\Leftrightarrow 7y = 8 - 22$$

$$\Leftrightarrow 7y = -14$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-14}{7}$$

$$\Leftrightarrow y = -2$$

Or, on sait que  $x = 11 + 3y$ , donc

$$x = 11 + 3 \times (-2) = 11 - 6 = 5$$

Le couple solution est donc :  $\boxed{(5 ; -2)}$

#### Remarque 15.1 (Quelle méthode utiliser ?)

Dans certains cas, la méthode par substitution fait faire des calculs avec des écritures fractionnaires, ce qui complique les calculs.

Par exemple, dans le système précédent on a écrit  $x$  en fonction de  $y$  ainsi :  $x = 11 + 3y$ , et comme il n'y a pas de barre de fraction, les calculs ne sont pas compliqués.

En revanche, dans l'exemple suivant la méthode par combinaison linéaire est préférable.

**Exemple 15.2**

Résolution du système  $\begin{cases} 3x + 11y = 23 \\ 7x - 6y = 22 \end{cases}$

**Résolution du système par combinaison linéaire**

Élimination de  $x$  et calcul de  $y$ .

$$\begin{cases} 3x + 11y = 23 \\ 7x - 6y = 22 \end{cases} \begin{array}{l} \times 7 \\ \times 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} 21x + 77y = 161 \\ 21x - 18y = 66 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \iff 95y = 95 \\ & \iff y = 1 \end{aligned}$$

On remplace  $y$  par 1 dans la première équation et on calcule  $x$ .

$$\begin{aligned} 3x + 11y &= 23 \\ 3x + 11 \times 1 &= 23 \\ \iff 3x &= 23 - 11 \\ \iff 3x &= 12 \\ \iff x &= \frac{12}{3} \\ \iff x &= 4 \end{aligned}$$

Le couple solution est donc :  $\boxed{(4 ; 1)}$

**Résolution du système par substitution**

$$\begin{cases} 3x + 11y = 13 \\ 7x - 6y = 22 \end{cases}$$

On écrit  $x$  en fonction de  $y$ .

$$3x + 11y = 23 \iff x = \frac{-11y + 23}{3}$$

On remplace  $x$  par  $\frac{-11y + 23}{3}$  dans la deuxième équation.

$$\begin{aligned} 7x - 6y &= 22 \\ \iff 7 \times \frac{-11y + 23}{3} - 6y &= 22 \\ \iff 7 \times \frac{-11y + 23}{3} - \frac{6y \times 3}{3} &= 22 \\ \iff \frac{-77y + 161}{3} - \frac{18y}{3} &= 22 \\ \iff \frac{-77y + 161 - 18y}{3} &= 22 \\ \iff \frac{-95y + 161}{3} &= 22 \\ \iff -95y + 161 &= 22 \times 3 \\ \iff -95y + 161 &= 66 \\ \iff -95y &= 66 - 161 \\ \iff -95y &= -95 \\ \iff y &= \frac{-95}{-95} \\ \iff y &= 1 \end{aligned}$$

Or, on sait que  $x = \frac{-11y + 23}{3}$ ,

$$\text{donc } x = \frac{-11 \times 1 + 23}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Le couple solution est donc :  $\boxed{(4 ; 1)}$

**15.2 Intersection de droites**

**Remarque 15.2**

Une équation linéaire à deux inconnues est une équation de la forme  $ax + by = c$ , ce qui équivaut à  $ax + by - c = 0$ , autrement dit une équation linéaire à deux inconnues équivaut à une équation cartésienne de droite.

Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues revient donc à déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites. Voir l'exemple suivant.

**Exemple 15.3**

Les équations cartésiennes de deux droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont données ci-dessous.

$$(d_1) : 3x + 11y - 23 = 0$$

$$(d_2) : 7x - 6y - 22 = 0$$

Ces deux droites sont tracées sur la figure ci-dessous. On appelle  $K$  leur point d'intersection.

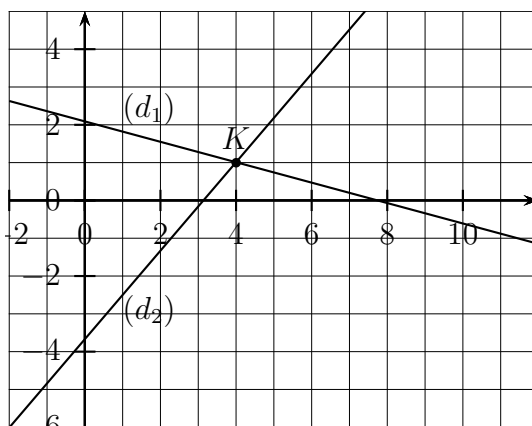
Or, on a les équivalences suivantes :

$$3x + 11y - 23 = 0 \iff 3x + 11y = 23$$

$$7x - 6y - 22 = 0 \iff 7x - 6y = 22.$$

Dans l'exemple 15.2, on a résolu le système formé par ces deux équations  $\begin{cases} 3x + 11y = 23 \\ 7x - 6y = 22 \end{cases}$ ,

et le couple solution  $(4; 1)$  que l'on avait obtenu est le couple des coordonnées du point  $K$ , point d'intersection des deux droites.



## 16 Échantillonnage

### 16.0 Programme

#### Contenus

- Échantillon aléatoire de taille  $n$  pour une expérience à deux issues.
- Principe de l'estimation d'une probabilité, ou d'une proportion dans une population, par une fréquence observée sur un échantillon.
- Version vulgarisée de la loi des grands nombres : « Lorsque  $n$  est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité. »

#### Capacités attendues

- Lire et comprendre une fonction Python renvoyant le nombre ou la fréquence de succès dans un échantillon de taille  $n$  pour une expérience aléatoire à deux issues.
- Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur.
- Simuler  $N$  échantillons de taille  $n$  d'une expérience aléatoire à deux issues. Si  $p$  est la probabilité d'une issue et  $f$  sa fréquence observée dans un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre  $p$  et  $f$  est inférieur ou égal à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

### 16.1 Échantillonnage et fluctuation d'échantillonnage

Dans cette première partie du cours, on s'intéresse à un certain caractère dans une population donnée dont la proportion  $p$  est connue.

Cette proportion et ce caractère peuvent être par exemple :

- la proportion de tickets gagnants dans l'ensemble des billets qui ont été imprimés pour une tombola ;
- la proportion de pièces défectueuses dans l'ensemble des pièces produite par une usine en un mois ;
- la proportion de personnes qui utilisent les transports en commun dans la population d'une ville ;
- la proportion de clients achetant des fruits et légumes dans l'ensemble des clients d'une grande surface pendant un an.

La situation de l'échantillonnage est de considérer un groupe de  $n$  individus dans cette population, qu'on appelle un échantillon de taille  $n$  et de vérifier la fréquence  $f$  du caractère dans cet échantillon.

En reprenant les exemples précédents, cet échantillon et cette fréquence peuvent être :

- la fréquence de tickets gagnants parmi 100 billets de tombola pris au hasard ;
- la fréquence de pièces défectueuses parmi 1 000 pièces choisies au hasard dans la production d'une usine ;
- la fréquence de personnes qui utilisent les transports en commun parmi 500 personnes interrogées au hasard dans la population d'une ville ;
- la fréquence de clients achetant des fruits et légumes parmi 200 clients choisis au hasard parmi les clients d'une grande surface.

Revenons au caractère dans une population donnée dont la proportion  $p$  est connue.

Si l'on choisit un individu au hasard dans cette population, la probabilité que cet individu ait ce caractère est égale à la proportion  $p$  de ce caractère dans cette population. Voir l'exemple 16.1 page suivante.

**Exemple 16.1**

On sait que dans la population française la proportion de personnes atteintes par une certaine maladie est  $p = 30 \% = 0,3$ .

On choisit une personne au hasard dans cette population.

On appelle  $M$  l'événement : « la personne choisie au hasard est malade de cette maladie ».

La probabilité de  $M$  est donc :  $p(M) = p = 0,3$ .

**Objectif de la première partie du cours**

Le but de cette première partie du cours est d'expliquer comment simuler avec une calculatrice ou avec Python les situations ci-dessous.

1. Choisir une personne au hasard, et vérifier si elle est malade ou non, sachant que la probabilité qu'elle soit malade est  $p = 0,3$ .
2. Choisir un échantillon de  $n$  personnes au hasard, vérifier si elles sont malades ou non, et calculer la fréquence  $f$  de personnes malades.
3. Étudier ensuite comment évolue cette fréquence  $f$  par rapport à la probabilité  $p$  quand le nombre  $n$  de personnes de l'échantillon devient grand.
4. Étudier un grand nombre d'échantillons de  $n$  personnes.

**16.1.a Simuler une expérience aléatoire et un événement de probabilité  $p$** **Exemple 16.2**

Avec une calculatrice, ou Python, ou dans un tableur on peut afficher des nombres au hasard, on appelle ça des nombres aléatoires.

On veut par exemple simuler l'expérience aléatoire de choisir une personne au hasard, et vérifier si l'événement  $M$  de probabilité  $p = 0,3$  est réalisé ou pas. On fait afficher alors des nombres entiers aléatoires entre 1 et 10.

- Si le nombre affiché est inférieur ou égal à 3, on considère que l'événement s'est produit, en effet la probabilité que le nombre affiché soit 1 ou 2 ou 3 est  $\frac{3}{10} = 0,3$  ;
- sinon, on considère qu'il ne s'est pas produit.

Quand l'événement se produit, on appelle ça *succès*, et quand il ne se produit pas, et on appelle ça *échec*.

**Méthode 16.1 (Afficher un nombre entier aléatoire entre 1 et 10)****Numworks**

- module Calculs
- touche Boîte à outils
- descendre sur Aléatoire et approximation ▷
- descendre sur `randint(a,b)` et valider
- compléter ainsi : `randint(1,10)`

TI 82 :  $\boxed{\text{math}}$   $\boxed{\leftarrow}$   $\boxed{5}$ , et compléter ainsi : `entAléat(1,10)`

TI 83 :

- $\boxed{\text{math}}$   $\boxed{\rightarrow}$   $\boxed{\rightarrow}$   $\boxed{\rightarrow}$   $\boxed{5}$
- compléter comme ci-dessous, puis valider :  
bornin:1  
bornsup:10  
n:

- on voit : `nbrAléatEnt(1,10)`
- valider

CASIO : OPTN F6 ( $\triangleright$ ) F2 (PROB) F4 (RAND) F2 (Int)

et compléter ainsi : `RandInt#(1,10)`

**En Python**

Au début du script, saisir ceci : `from random import *`

L'instruction pour obtenir un nombre entier aléatoire entre 1 et 10 est : `randint(1,10)`

Dans le tableur de LibreOffice : `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;10)`

**16.1.b Simuler la répétition d'une expérience aléatoire – Fluctuation d'échantillonnage**

**Exemple 16.3**

On veut maintenant simuler  $n$  fois l'expérience aléatoire de choisir une personne au hasard, et de vérifier si l'événement  $M$  de probabilité  $p = 0,3$  est réalisé ou pas.

Cette simulation revient à choisir au hasard un échantillon de  $n$  personnes, à vérifier si elles sont malades ou non, et calculer la fréquence observée  $f$  de personnes malades.

Effectuons cette simulation pour  $n = 10$  en répétant 10 fois ce qui est expliqué dans l'exemple 16.2.

On obtient alors le tableau ci-dessous.

Nombre aléatoire entre 1 et 10	7	7	5	5	6	6	1	7	3	8
Événement $M$ , succès ou échec	échec	échec	échec	échec	échec	échec	succès	échec	succès	échec

Dans cette simulation, l'événement  $M$  s'est produit 2 fois (2 succès), la fréquence observée de malades dans cet échantillon est :  $f = \frac{2}{10} = 0,2$ .

Recommençons deux fois, on obtient alors les tableaux ci-dessous.

Nombre aléatoire entre 1 et 10	3	8	2	1	8	5	4	8	5	6
Événement $M$ , succès ou échec	succès	échec	succès	succès	échec	échec	échec	échec	échec	échec

L'événement  $M$  s'est produit 3 fois (3 succès), la fréquence observée de malades dans cet échantillon est :  $f = \frac{3}{10} = 0,3$

Nombre aléatoire entre 1 et 10	8	4	3	2	5	8	3	2	3	10
Événement $M$ , succès ou échec	échec	échec	succès	succès	échec	échec	succès	succès	succès	échec

L'événement  $M$  s'est produit 5 fois (5 succès), la fréquence observée de malades dans cet échantillon est :  $f = \frac{5}{10} = 0,5$ .

**Remarque 16.1**

On remarque que les trois fréquences observées ne sont pas toujours égales à 0,3.

**Propriété 16.1 (Fréquence observée et probabilité)**

On considère une expérience aléatoire et un événement de probabilité  $p$ . On simule un échantillon de taille  $n$  en simulant  $n$  fois cette expérience aléatoire. On constate que la fréquence observée  $f$  de succès de cet événement n'est pas toujours égale à sa probabilité  $p$ .

**Définition 16.1 (Fluctuation d'échantillonnage)**

On considère une expérience aléatoire et un événement de probabilité  $p$ . On simule un échantillon de taille  $n$  en simulant  $n$  fois cette expérience aléatoire. Le fait que la fréquence observée  $f$  n'est pas toujours égale à la probabilité  $p$  est nommé fluctuation d'échantillonnage.

## 16.1.c Échantillon de grande taille – Loi des grands nombres

## Exemple 16.4

Simulons maintenant des échantillons dont la taille  $n$  est de plus en plus grande.

Nous allons utiliser un script Python nommé `echantillonnage2de` que l'on peut envoyer sur sa calculatrice Numworks ou que l'on peut copier sur son ordinateur, et qui est accessible en suivant le lien ci-dessous.

<https://my.numworks.com/python/jean-luc-poncin/echantillonnage2de>

Ce script contient la fonction Python ci-dessous, nommée `frsucces`, qui permet de simuler  $n$  fois l'expérience aléatoire de choisir une personne au hasard et vérifier si elle est malade ou pas, de compter le nombre de personnes malades (nombre de succès), puis de calculer la fréquence de succès.

Les variables  $n$ , `compteur`,  $i$  sont des entiers naturels.

	Fonction Python	Explications
1	<code>def frsucces(n):</code>	On définit la fonction <code>frsucces</code> de variable $n$
2	<code>compteur=0</code>	Au début le compteur vaut zéro
3	<code>for i in range(n):</code>	On répète $n$ fois les lignes 4 et 5.
4	<code>if(randint(1,10)&lt;=3):</code>	<i>Si le nombre aléatoire entre 1 et 10 est inférieur ou égal à 3</i>
5	<code>compteur=compteur+1</code>	<i>la variable compteur augmente de 1</i>
6	<code>return(compteur/n)</code>	À la fin on retourne la valeur de <code>compteur/n</code>

On exécute la fonction `frsucces` pour des valeurs de  $n$  de plus en plus grande et on obtient par exemple le tableau ci-dessous.

$n$	10	100	1 000	10 000	100 000
<code>frsucces(n)</code>	0,2	0,26	0,294	0,3043	0,29995

## Remarque 16.2

On constate que la fréquence de succès est de plus en plus proche de 0,3 c'est à dire que lorsque la taille de l'échantillon devient grande, la fréquence de malade  $f$  est proche de la probabilité  $p = 0,3$ .

## Propriété 16.2 (Loi des grands nombres)

Lorsque la taille  $n$  de l'échantillon devient grande, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité.

## Remarque 16.3

Dans la loi des grands nombres formulée ci-dessus, il convient de préciser deux choses.

- La loi des grands nombres indique que, lorsque la taille  $n$  de l'échantillon devient grande, la fréquence observée est proche de la probabilité. Oui, mais proche comment ? Avec quel écart ?
- La loi des grands nombres indique que, lorsque la taille  $n$  de l'échantillon devient grande, la fréquence observée est proche de la probabilité, en précisant *sauf exception*. Oui, mais combien y a-t-il d'exception ? ou plutôt, quelle est la proportion d'exception ?

Pour répondre à ces deux questions, il faut maintenant simuler un grand nombre d'échantillons.

## 16.1.d Simuler un grand nombre d'échantillons

**Exemple 16.5**

On continue à prendre comme exemple la situation de la maladie dont 30 % de la population est atteinte, en rappelant qu'ainsi la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit malade est  $p = 0,3$ .

Dans le fichier annexe nommé `2de_echantillonnage_exemple_du_cours.pdf` on voit deux tableaux, créés avec un tableur, dans lesquels sont simulés 100 échantillons de 30 personnes choisies au hasard ( $n = 30$ ).

Dans ces tableaux, on observe l'écart entre 0,3 et la fréquence  $f$  de malades, et on constate que l'échantillon où cet écart est le plus important est l'échantillon E42.

La propriété, la remarque et la définition ci-dessous vont maintenant donner des précisions sur l'écart entre la fréquence observée et la probabilité.

**Propriété 16.3 (admise)**

On répète  $n$  fois une expérience aléatoire avec un événement de probabilité  $p$ .

On appelle  $f$  la fréquence observée de succès de cet événement.

Alors, dans au moins 95 % des cas, l'écart entre  $f$  et  $p$  est inférieure ou égale à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , autrement dit :

dans au moins 95 % des cas,  $|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**Remarque 16.4**

Dans la remarque 16.1 page 81, on indique que la fréquence observée fluctue autour de la probabilité  $p$ . La propriété ci-dessus précise en fait que dans 95 % des cas, la fréquence fluctue dans l'intervalle

$$\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

**Définition 16.2 (Intervalle de fluctuation)**

On répète  $n$  fois une expérience aléatoire avec un événement de probabilité  $p$ . On simule ainsi un échantillon de taille  $n$ . On appelle  $f$  la fréquence observée de succès de cet événement.

L'intervalle  $\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  est alors nommé *intervalle de fluctuation*.

**Exemple 16.6 (Vérification de l'écart entre fréquence et probabilité)**

Vérifions tout cela dans les tableaux du fichier annexe `2de_echantillonnage_exemple_du_cours.pdf`.

Ce sont des échantillons de taille  $n = 30$ , calculons donc  $\frac{1}{\sqrt{n}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0,18$

Les seuls échantillons où l'écart entre  $f$  et  $p$  est supérieur à 0,18 sont les échantillons E42, E77 et E87.

Échantillon E42 :  $|f - p| = |0,07 - 0,3| = |-0,23| = 0,23 > 0,18$

Échantillon E42 et E87 :  $|f - p| = |0,5 - 0,3| = 0,2 > 0,18$

La proportion d'échantillons où la distance entre  $f$  et  $p$  est supérieure à 0,18 est donc  $\frac{3}{100} = 3\%$ , donc la proportion d'échantillons où l'écart entre  $f$  et  $p$  est inférieure ou égale à 0,18 est 97 %, on a donc bien au moins 95 % des échantillons de taille  $n$  où l'écart entre la fréquence observée  $f$  et la probabilité  $p$  est inférieure ou égale à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .



Pour obtenir d'autres exemples possibles de tableaux de simulations de 100 échantillons, on pourra utiliser un des deux fichiers annexes suivants :

- le fichier `2de_echantillonnage_fichier_de_test.ods` au format LibreOffice,
- le fichier `2de_echantillonnage_fichier_de_test.xlsx` au format Excel.

## 16.2 Estimation d'une probabilité ou d'une proportion dans une population

Dans cette deuxième partie du cours, on s'intéresse toujours à un certain caractère dans une population donnée, mais cette fois-ci lorsque la proportion  $p$  est inconnue.

Si l'on choisit une individu de la population au hasard, et qu'on appelle  $A$  l'événement « l'individu choisi au hasard a ce caractère », alors la proportion  $p$  est aussi la probabilité de  $A$ .

L'objectif est donc d'estimer une probabilité ou d'estimer une proportion dans une population.

D'après la première partie du cours, nous savons que lorsque la taille  $n$  d'un échantillon de la population devient grande, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité. Plus précisément nous savons que dans 95 % des cas l'écart entre la probabilité  $p$  et la fréquence  $f$  est inférieure ou égale à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . On a donc la propriété ci-dessous.

### Propriété 16.4

La proportion d'un caractère dans une population est  $p$ , et, dans un échantillon de taille  $n$ , la fréquence observée est  $f$ .

Alors, dans 95 % des cas, on peut estimer, que la proportion  $p$  appartient à l'intervalle

$$\left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Cela signifie aussi, pour un individu pris au hasard dans cette population, que, dans 95 % des cas, la probabilité  $p$  qu'il ait ce caractère appartient à cet intervalle.

### Exemple 16.7

Une ville a imprimé 10 000 tickets de tombola. Une association en achète 80 et il y a 16 billets gagnants.

La population est l'ensemble des 10 000 tickets de tombola. Le caractère étudié est « billet gagnant ou non ».

Les 80 tickets de l'association constituent un échantillon de taille  $n = 80$ .

Pour estimer la proportion  $p$  de tickets gagnants dans les tickets imprimés par la ville, calculons  $f$ , puis  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , puis  $f - \frac{1}{\sqrt{n}}$  et  $f + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

$$f = \frac{16}{80} = 0,2 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{80}} \approx 0,11$$

$$f - \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,2 - 0,11 = 0,09 \quad f + \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,2 + 0,11 = 0,31.$$

On peut donc estimer, avec 95 % de chances d'avoir raison, que la proportion  $p$  de tickets gagnants dans les tickets imprimés par la ville, est dans l'intervalle  $[0,09 ; 0,31]$ .

Cela signifie aussi qu'on peut estimer, avec 95 % de chances d'avoir raison, que la probabilité de gain à cette tombola est comprise entre 0,09 et 0,31.