

Chapitre 13

Statistiques

I Exercices

13.1 Moyenne et écart-type

Exercice 13.1

Le tableau 13.1 ci-dessous donne une série de notes obtenues à un devoir par un groupe de 20 élèves. Le tableau 13.2 sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

Notes	10	10	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	14
-------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tab. 13.1

Notes	10	11	12	13	14	Total
Effectifs						
$(\text{note} - m)^2 \times \text{effectif}$						

Tab. 13.2

1. Compléter les effectifs dans le tableau 13.2.
2. Calculer la moyenne m de ce devoir.
3. Nous allons maintenant calculer l'écart-type de cette série de notes, qui indiquera si ces notes sont groupées ou dispersées.
Pour cela, suivre les étapes ci-dessous.
 - a) Compléter la 3^e ligne du tableau 13.2, en arrondissant chaque fois au dixième près.
 - b) Diviser le total par le nombre total de notes.
 - c) Calculer la racine carrée du résultat. Arrondir à l'unité près.
4. Le calcul de l'écart-type n'est pas à retenir (ouf!).
Refaire maintenant les calculs de moyenne et d'écart-type à la calculatrice en suivant l'exemple 13.4 page 158.

Exercice 13.2

Le tableau 13.3 ci-dessous donne une série de notes obtenues à un devoir par un autre groupe de 20 élèves.

Notes	8	11	12	13	15	Total
Effectifs	3	3	7	6	1	

Tab. 13.3

1. Dans la calculatrice saisir cette série dans les colonnes Valeurs V2 et Effectifs N2, puis déterminer la moyenne m_2 et l'écart-type s_2 de cette série de notes.
2. Récapituler ci-dessous.
 Exercice 13.1 : moyenne $m = \dots\dots\dots$ écart-type $s = \dots\dots\dots$
 Exercice 13.2 : moyenne $m_2 = \dots\dots\dots$ écart-type $s_2 = \dots\dots\dots$
3. Lire la propriété 13.1 page 158, puis comparer ces deux séries de notes, comme dans l'exemple 13.5 page 158.
4. Vérifier vos réponses du 3. en allant sur l'onglet Histogramme de la calculatrice.

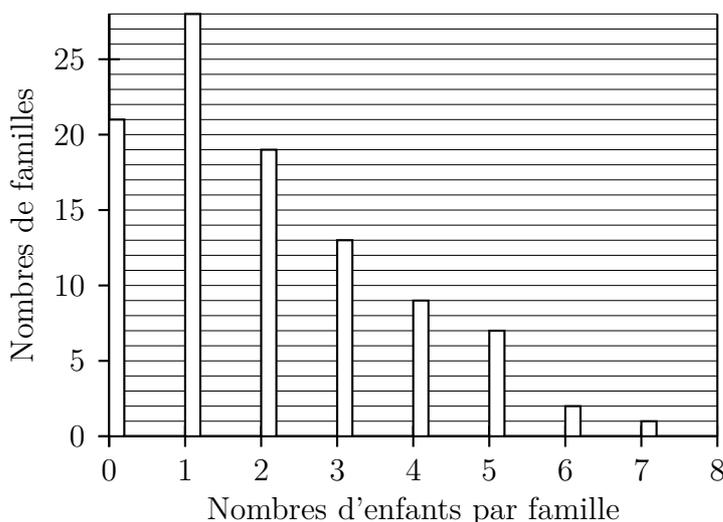
Exercice 13.3

Le diagramme en bâtons ci-contre indique la répartition du nombre d'enfants par famille dans un village.

Il y a 21 familles qui n'ont pas d'enfant, 28 familles qui ont 1 enfant, et ainsi de suite.

Le tableau ci-dessous indique la répartition du nombre d'enfants par famille dans un autre village.

Nb enfants	0	1	2	3	4	5	6
Nb familles	16	31	25	12	5	2	1



1. Saisir ces deux séries statistiques dans la calculatrice.
2. Observer les deux diagrammes dans l'onglet Histogramme et comparer ces deux séries (niveau global et dispersion).
3. Vérifier avec les moyennes et écarts-types.

13.2 Linéarité de la moyenne

Exercice 13.4

Au cours d'un devoir, cinq élèves ont eu 7, huit élèves ont eu 10, sept élèves ont eu 15.

1. Calculer la moyenne du devoir, arrondie au dixième près. Détailler le calcul.
2. Le professeur décide d'ajouter 2 points à tous les élèves. Calculer la nouvelle moyenne.
3. Si toutes les notes de départ sont augmentées de 30 %, calculer la nouvelle moyenne.

13.3 Médiane, quartiles, écart inter-quartile

Exercice 13.5

Voici la série des salaires mensuels en euros dans une petite entreprise.

Montants en euros	1 300	1 500	2 000	3 000	3 500	4 000	Total
Effectifs	2	4	2	1	2	1	12

Tab. 13.4

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Tab. 13.5

1. Dans le tableau 13.5, écrire la liste des 12 salaires dans l'ordre croissant.
2. Déterminer la médiane, les quartiles et l'écart interquartile en s'aidant du cours à partir de la définition 13.5 page 159.
3. Vérifier à la calculatrice (saisie dans **Données**, résultats dans **Stats**).

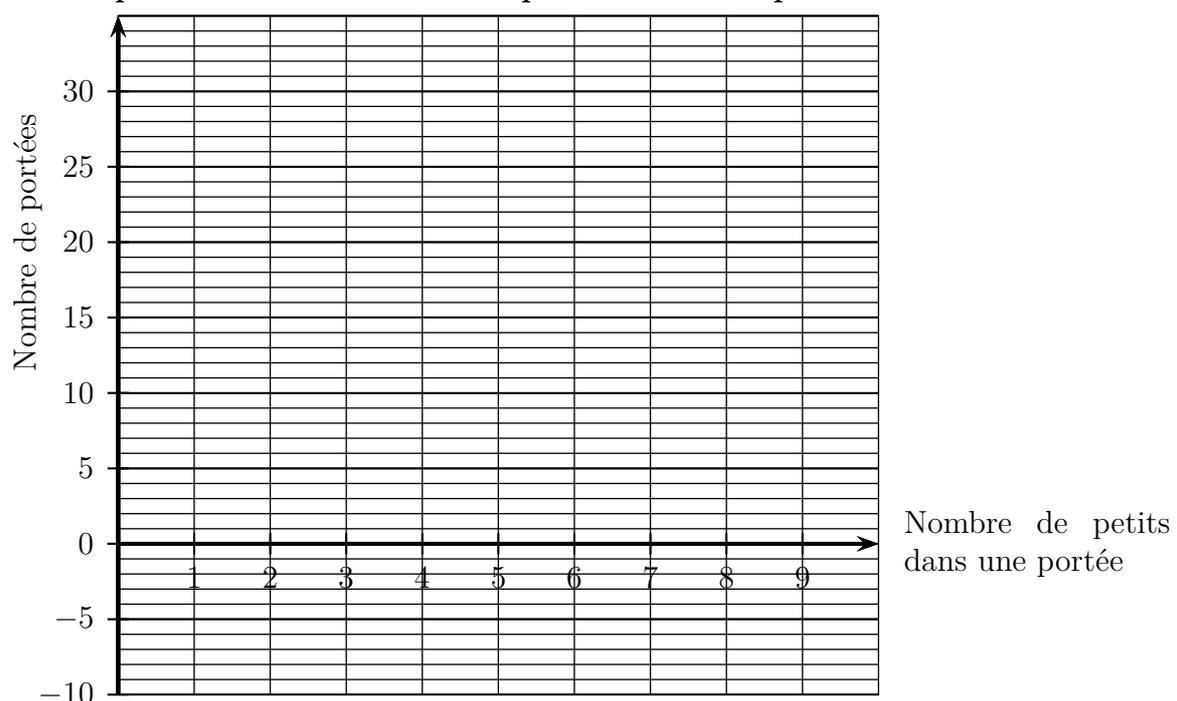
Exercice 13.6

Pour 121 portées de souris blanches, on a dénombré les souriceaux. Les résultats sont dans le tableau ci-dessous.

1. Déterminer la médiane et les quartiles de cette série avec la calculatrice.
2. Dans le repère plus bas, tracer un diagramme bâtons représentant cette série statistique.
3. Dans le même repère, sous l'axe horizontal tracer le diagramme en boîte de cette série. Voir la définition 13.8 page 161. On peut aussi observer l'onglet **Boîte** dans la calculatrice Numworks.

Nombre de petits	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs (nombres de portées)	7	11	16	17	26	31	11	1	1

Répartition des nombres de petits dans 121 portées de souriceaux



Exercice 13.7**Partie A**

Un groupe est constitué de 50 individus souffrant d'une maladie et ne recevant pas de traitement. Pour chaque individu on mesure la quantité dans le sang d'une molécule M en microgrammes par litre.

Cette série de mesures est donnée dans le tableau ci-dessous.

Quantités ($\mu\text{g/L}$)	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190
Effectifs	2	3	3	5	3	4	3	7	5	6	3	2	4

$\mu\text{g/L}$ microgrammes par litre

- Déterminer la médiane et les quartiles avec la calculatrice.
- Sur le quadrillage ci-dessous, tracer le diagramme en boîte de cette série statistique, en prévoyant la place pour un deuxième diagramme en boîte en dessous.

Partie B

Un deuxième groupe de 50 personnes souffrant de la maladie reçoit un traitement qui a pour but de faire baisser la quantité dans le sang de la molécule M.

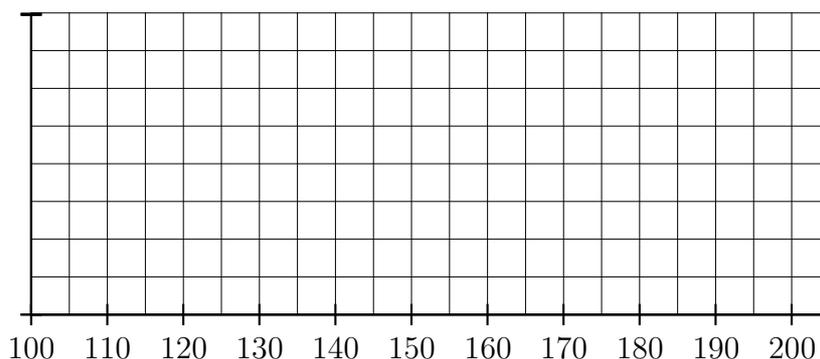
Dans ce 2^e groupe, on mesure donc la quantité dans le sang de la molécule M en microgrammes par litre, et on obtient les résultats suivants :

$$\text{Min} = 105 \quad Q_1 = 125 \quad \text{Méd} = 150 \quad Q_3 = 165 \quad \text{Max} = 180.$$

Tracer le diagramme en boîte de cette deuxième série statistique, sur le quadrillage ci-dessous.

Partie C

- En comparant les deux séries, le traitement a-t-il eu l'effet espéré? Justifier d'après les données et les diagrammes.
On pourra s'aider de la propriété 13.3 et de l'exemple 13.10 page 161.
- Quelle est la série où les valeurs sont les plus dispersées? Justifier.
- Les proportions normales de la molécule M dans le sang sont inférieures ou égales à 160. Comparer ces deux séries à ce sujet, en donnant des pourcentages.



II Cours

13.0 Programme

13.0.a Collège

Connaissances

- Effectifs, fréquences.
- Indicateurs de position : moyenne, médiane.
- Indicateur de dispersion : étendue.

Compétences associées

- Recueillir des données, les organiser.
- Lire et interpréter des données sous forme de données brutes, de tableau, de diagramme (diagramme en bâtons, diagramme circulaire, histogramme).
- Utiliser un tableur-grapheur pour présenter des données sous la forme d'un tableau ou d'un diagramme.
- Calculer des effectifs, des fréquences.
- Calculer et interpréter des indicateurs de position ou de dispersion d'une série statistique.

13.0.b Classe de seconde

Contenus

- Indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée.
- Linéarité de la moyenne.
- Indicateurs de dispersion : écart interquartile, écart type.

Capacités attendues

- Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.
- Pour des données réelles ou issues d'une simulation, lire et comprendre une fonction écrite en Python renvoyant la moyenne m , l'écart type s , et la proportion d'éléments appartenant à $[m - 2s, m + 2s]$.

13.1 Série statistiques

Définition 13.1

Une série statistique est une série de nombres que l'on donne sous forme d'une liste de valeurs ou d'un tableau avec des effectifs.

Exemple 13.1

Dans une équipe de football, la série des âges des membres de l'équipe est donnée ci-dessous.

Âges en années	18	18	18	20	20	20	20	20	20	21	21
----------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

On peut donner cette série dans un tableau avec des effectifs.

Âges	18	20	21
Effectifs	3	6	2

13.2 Moyenne et écart-type

Définition 13.2 (Moyenne simple)

La moyenne d'une série statistique est la somme des valeurs de cette série divisée par l'effectif total de cette série.

Définition 13.3 (Moyenne pondérée)

Lorsqu'une série statistique est donnée par un tableau avec des effectifs, pour calculer sa moyenne,

- on multiplie chaque valeur par son effectif ;
- on ajoute ces produits ;
- on divise par l'effectif total de cette série.

Exemple 13.2

Reprenons la série des âges des membres d'une équipe de football de l'exemple 13.1.

On peut calculer la moyenne m de deux façons :

$$\text{moyenne simple : } m = \frac{18 + 18 + 18 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 21 + 21}{11} = \frac{216}{11} \approx 19,6$$

$$\text{moyenne pondérée : } m = \frac{18 \times 3 + 20 \times 6 + 21 \times 2}{11} = \frac{216}{11} \approx 19,6$$

La moyenne d'âge de cette équipe est d' environ 19 ans et demi.

Définition 13.4 (Écart-type)

Pour calculer l'écart-type d'une série statistique,

- on calcule la moyenne ;
- on calcule les écarts de chaque valeur avec la moyenne ;
- on met ces écarts au carré ;
- on calcule la moyenne de ces carrés ;
- on prend la racine carrée du résultat.

Exemple 13.3 (Calcul détaillé d'un écart-type)

Reprenons la série des âges des membres d'une équipe de football de l'exemple 13.1.

Moyenne : $m \approx 19,6$

Âge	Effectif	$(\hat{\text{Age}} - m)^2 \times \text{Effectif}$
18	3	8,03
20	6	0,79
21	2	3,72
Total	11	12,55

$$\text{Écart-type : } s = \sqrt{\frac{12,55}{11}} \approx 1,07$$

L'écart-type des âges de cette équipe est d' environ 1 an.

Exemple 13.4 (Moyenne et écart-type à la calculatrice)

Reprenons la série des âges des membres d'une équipe de football de l'exemple 13.1.

On peut saisir le tableau ci-contre à la calculatrice et obtenir la moyenne et l'écart-type.

Âge	Effectif
18	3
20	6
21	2

Avec la calculatrice Numworks :

- aller dans le module **Statistiques** ;
- dans l'onglet **Données**, saisir les valeurs (les âges) et les effectifs ;
- aller dans l'onglet **Stats**.

Avec la TI Premium :

- appuyer sur **stats** ;
- choisir **Modifier**, et valider ;
- saisir les valeurs (les âges) et les effectifs dans les colonnes L1 et L2 ;
- appuyer sur **stats** ;
- aller sur **CALC** ;
- choisir **Stats 1 Var**, valider ;
- compléter ainsi
Xliste:L1
ListeFréq:L2
- descendre sur **Calculer** et valider.
- La moyenne est \bar{x} , l'écart-type est σ_x .

Propriété 13.1 (Utilité de la moyenne et de l'écart-type)

- La moyenne d'une série statistique indique son niveau global.
On dit que c'est un indicateur de position.
- L'écart-type d'une série statistique indique si les valeurs de la série sont groupées ou dispersées.
On dit que c'est un indicateur de dispersion.

Exemple 13.5 (Comparer deux séries statistiques avec moyenne et écart type)

Rappelons la série des âges des membres d'une équipe de football de l'exemple 13.1.

Âge	Effectif
18	3
20	6
21	2

Pour cette série d'âges la moyenne et l'écart-type sont : $m \approx 19,6$ et $s \approx 1,1$.

Considérons la série des âges des membres d'une 2^e équipe de football, donnée par le tableau ci-dessous.

Âge	Effectif
17	4
20	5
25	2

Avec la calculatrice, on calcule la moyenne et l'écart-type et on obtient : $m_2 \approx 19,8$ et $s_2 \approx 2,8$.

Comparons ces deux séries statistiques :

- les deux moyennes d'âges indiquent que les deux équipes ont globalement à peu près le même âge ;
- les deux écarts-types indiquent une plus grande dispersion des âges dans la 2^e équipe.

13.3 Linéarité de la moyenne

Propriété 13.2

Pour une série statistique de moyenne m ,

- Si on multiplie toutes les valeurs de la série par le même nombre a , la moyenne de cette nouvelle série est $a \times m$.
- Si on ajoute le même nombre b à toutes les valeurs de la série, la moyenne de cette nouvelle série est $m + b$.

13.4 Médiane, quartiles, écart interquartile

Définition 13.5 (Médiane)

On range les valeurs d'une série statistique par ordre croissant.

La médiane est le nombre tel que la moitié des valeurs soient inférieures ou égale à la médiane.

Méthode 13.1 (Calcul de la médiane)

Pour calculer la médiane d'une série statistiques,

- on range cette série dans l'ordre croissant ;
- on calcule la moitié de l'effectif total ;
- on arrondit le résultat à l'entier supérieur r ;
- la médiane est la valeur de rang r .

Exemple 13.6

La série ci-dessous donne les poids de 16 bébés nés en quelques jours dans une maternité.

Ces poids sont rangés dans l'ordre croissant de 1 kg à 5 kg.

On calcule la moitié de l'effectif total : $\frac{16}{2} = 8$

La médiane est la valeur de rang 8, c'est dire 3 kg.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Poids (kg)	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0

(Me)

Définition 13.6 (Quartiles)

On range les valeurs d'une série statistique par ordre croissant.

- Le 1^{er} quartile Q_1 est le nombre tel le quart des valeurs soient inférieures ou égale à Q_1 .
- Le 3^e quartile Q_3 est le nombre tel trois quart des valeurs soient inférieures ou égale à Q_3 .

Méthode 13.2 (Calculs des quartiles)

Pour calculer le premier quartile Q_1 d'une série statistique,

- on range cette série dans l'ordre croissant ;
- on calcule le quart de l'effectif total ;
- on arrondit le résultat à l'entier supérieur r ;
- le premier quartile Q_1 est la valeur de rang r .

Pour calculer le troisième quartile Q_3 d'une série statistique, on procède comme pour Q_1 avec trois quarts au lieu de un quart.

Exemple 13.7

On reprend l'exemple de la série des poids de 16 bébés nés dans une maternité. Ces poids sont rangés dans l'ordre croissant de 1 kg à 5 kg.

Premier quartile Q_1 :

- on calcule le quart de l'effectif total : $\frac{16}{4} = 4$;
- le premier quartile est la valeur de rang 4, donc : $Q_1 = 1,5 \text{ kg}$.

Troisième quartile Q_3 :

- on calcule les trois quarts de l'effectif total : $\frac{16 \times 3}{4} = 12$;
- le troisième quartile est la valeur de rang 12, donc : $Q_3 = 3,5 \text{ kg}$.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Poids (kg)	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0

Q_1
Me
 Q_3

Définition 13.7 (Écart interquartiles)

L'écart interquartile d'une série statistique est égal à $Q_3 - Q_1$.

Exemple 13.8 (Calcul d'écart interquartiles)

On reprend l'exemple de la série des poids de 16 bébés nés dans une maternité.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Poids (kg)	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0

Q_1
Me
 Q_3

$$Q_1 = 1,5 \quad Q_3 = 3,5 \quad \text{Écart interquartiles : } Q_3 - Q_1 = 3,5 - 1,5 = \boxed{2}$$

Exemple 13.9 (Médiane et quartiles à la calculatrice)

On reprend l'exemple de la série des poids de 16 bébés nés dans une maternité.

Poids (kg)	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	5,0	5,0
------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Cette série peut être donnée aussi par le tableau ci-dessous.

Poids (kg)	Effectifs
1,0	2
1,5	3
3,0	5
3,5	3
4,0	1
5,0	2

On peut alors saisir les données de ce tableau dans la calculatrice.

Avec la calculatrice Numworks :

- module Statistiques ;
- dans l'onglet Données on saisit le tableau ;
- résultats dans l'onglet Stats.

Avec la TI Premium :

- touche $\boxed{\text{stats}}$;
- choisir Modifier, et valider ;
- saisir le tableau ;

- appuyer sur **stats**;
- aller sur **CALC**;
- choisir **Stats 1 Var**, valider;
- compléter ainsi
Xliste:L1
ListeFréq:L2
- descendre sur **Calculer** et valider.
- dans le tableau de résultats, descendre jusqu'à **Q1, Méd, Q3**.

Propriété 13.3 (Utilité de la médiane et des quartiles)

- La médiane d'une série statistique indique son niveau global.
C'est un indicateur de position.
- L'écart interquartile d'une série statistique indique si les valeurs de la série sont groupées ou dispersées.
C'est un indicateur de dispersion.

Exemple 13.10 (Comparer deux séries statistiques avec médiane et écart interquartile)

Rappelons la série des poids de 16 bébés nés dans une maternité.

Poids (kg)	Effectifs
1,0	2
1,5	3
3,0	5
3,5	3
4,0	1
5,0	2

Pour cette série, rappelons la médiane, les quartiles, et l'écart interquartile :

$$\boxed{\text{Méd} = 3} \quad Q_1 = 1,5 \quad Q_3 = 3,5 \quad \boxed{Q_3 - Q_1 = 2}$$

Considérons la série des poids de 17 bébés nés dans cette maternité pendant une autre période, donnée par le tableau ci-dessous.

Poids (kg)	Effectifs
2,5	2
3,0	3
3,5	5
4,0	4
4,5	2
5,0	1

Avec la calculatrice, on obtient la médiane, les quartiles, et l'écart interquartile :

$$\boxed{\text{Méd} = 3,5} \quad Q_1 = 3 \quad Q_3 = 4 \quad \boxed{Q_3 - Q_1 = 1}$$

Comparons ces deux séries statistiques :

- les deux poids médians indiquent que les bébés du 2^e groupe ont globalement un poids plus élevé;
- les deux écart interquartiles indiquent une plus grande dispersion des poids dans le 1^{er} groupe.

Définition 13.8 (Diagramme en boîte)

