Chapitre 12

Droites du plan

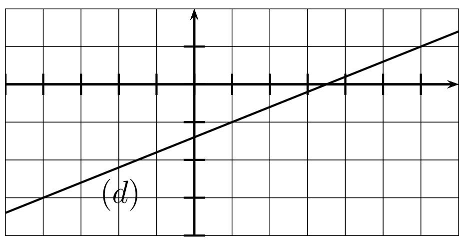
I Exercices

12.1 Vecteur directeur d'une droite.

Lire d'abord dans le cours, la définition 12.1 et l'exemple 12.1 page 144.

Exercice 12.1 (Tracer une droite avec un point et un vecteur directeur.)
Tracer un repère, placer le point $A\,(2\ ;\ 1)$, puis tracer la droite (d) passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}\,(3\ ;\ 4)$.

Exercice 12.2 (Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite)
Déterminer graphiquement un vecteur directeur de la droite (d) tracée dans le repère ci-contre.



Exercice 12.3 (Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes)

1. Tracer un repère, puis tracer les droites indiquées ci-dessous.
   - la droite (d_1) passant par le point $A\,(-3\ ;\ 4)$ de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\ ;\ -1)$.
   - la droite (d_2) passant par le point $B\,(-2\ ;\ -1)$ de vecteur directeur $\vec{v}\,(6\ ;\ -2)$.
   - la droite (d_3) passant par le point $C\,(1\ ;\ 4)$ de vecteur directeur $\vec{w}\,(3\ ;\ -1)$.
2. Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ? Justifier par des calculs détaillés.
3. Les droites (d_2) et (d_3) sont-elles parallèles ? Justifier par des calculs détaillés.

12.2 Équation cartésienne d'une droite

Exercice 12.4

1. Tracer un repère, placer le point $A\ (1\ ;\ 2)$ et tracer la droite (d) passant par A de vecteur directeur $\vec{u}\,(4\ ;\ 3)$.
2. Placer un point M sur la droite (d).

3. On appelle x et y les coordonnées du point M.
Écrire en fonction de x et y les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

4. Sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, écrire une égalité avec x et y et la transformer sous la forme $ax + by + c = 0$.

Lire dans le cours, la propriété 12.2, la définition 12.2, la propriété 12.3 page 145, et l'exemple 12.4 page 146.

Exercice 12.5

1. Tracer un repère, placer le point $A\ (2\ ;\ 3)$ et tracer la droite (d) passant par A de vecteur directeur $\vec{u}\,(4\ ;\ -1)$.

2. Calculer une équation cartésienne de la droite (d) en utilisant la 1^{re} méthode de l'exemple 12.4.

3. Refaire les calculs avec la 2^{e} méthode de l'exemple 12.4.

Exercice 12.6

1. Tracer un repère, placer le point $A\ (-1\ ;\ 2)$ et tracer la droite (d) passant par A de vecteur directeur $\vec{u}\,(3\ ;\ 5)$.

2. Calculer une équation cartésienne de la droite (d) en utilisant la méthode de son choix.

Exercice 12.7

1. Tracer un repère, placer les points $E\ (1\ ;\ -2)$ et $F\ (5\ ;\ 1)$, puis tracer la droite (EF).

2. Calculer une équation cartésienne de la droite (EF) en utilisant la méthode de son choix.

Exercice 12.8 (Déterminer un vecteur directeur d'une droite)

Pour chacune des droites (d_1), (d_2), (d_3), (d_4), (d_5), une équation cartésienne est donnée ci-dessous. Donner chaque fois les coordonnées d'un vecteur directeur. On les nommera $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$, $\vec{u_4}$, $\vec{u_5}$.

1. (d_1) $6x + 8y + 9 = 0$ **2.** (d_2) $x - 4y + 7 = 0$ **3.** (d_3) $2x - y - 3 = 0$
4. (d_4) $3y - 2 = 0$ **5.** (d_5) $5x + 6 = 0$

Exercice 12.9 (Tracer une droite connaissant son équation cartésienne)

Tracer une repère, puis tracer la droite (d) d'équation $3x + 5y + 20 = 0$

Consigne : on calculera d'abord les coordonnées d'un point et on donnera un vecteur directeur, comme dans l'exemple 12.5 page 146.

Exercice 12.10

Tracer une repère, puis tracer la droite (d) d'équation $x - 2y + 8 = 0$. Détailler les calculs et justifier.

Exercice 12.11

Tracer une repère, puis tracer la droite (d) d'équation $-4x + 3y = 0$. Détailler les calculs et justifier.

Exercice 12.12

Tracer une repère, puis tracer la droite (d) d'équation $3x + 15 = 0$. Détailler les calculs et justifier comme dans l'exemple 12.6 page 147.

Exercice 12.13

Tracer une repère, puis tracer la droite (d) d'équation $2y - 10 = 0$. Détailler les calculs et justifier.

Exercice 12.14 (Vérifier si un point appartient à une droite)

1. Vérifier si les points $A\,(1\ ;\ 2)$, $B\,(6\ ;\ 6)$, $C\,(8\ ;\ 7)$ appartiennent à la droite (d) d'équation cartésienne $4x-5y+6=0$. Voir l'exemple 12.7 page 147.
2. Tracer un repère et tracer la droite (d) d'après les résultats de la question **1.**
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 12.15

1. Vérifier si le point $A\,(4\ ;\ 3)$ appartient à la droite (d_1) d'équation cartésienne $6x-y-21=0$.
2. Même question pour le point A et la droite (d_2) d'équation cartésienne $-x+y+2=0$.
3. Même question pour le point A et la droite (d_3) d'équation cartésienne $5y-15=0$.

Exercice 12.16

1. Tracer un repère, placer les points $A\,(-5\ ;\ 2)$ et $B\,(2\ ;\ -1)$ et tracer la droite (AB).
2. Calculer une équation cartésienne la droite (AB).
3. Placer le point $C\,(4\ ;\ -2)$.
4. Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier par des calculs.

Exercice 12.17 (Déterminer si deux droites sont parallèles)

Les droites (d_1), (d_2), (d_3) ont pour équations cartésiennes :

$(d_1)\ \ 4x-8y-16=0 \qquad (d_2)\ \ 2x-6y+8=0 \qquad (d_3)\ \ -3x+9y=0.$

1. Déterminer si les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles. Indication : déterminer d'abord un vecteur directeur de chaque droite.
2. Déterminer si les droites (d_2) et (d_3) sont parallèles.

12.3 Équation réduite d'une droite

12.3.a Définition, propriété, et tracé

Exercice 12.18

1. Tracer un repère, puis tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations cartésiennes :
   $(d_1)\quad 5x+20=0 \qquad (d_2)\quad 2x-y-3=0.$
2. Pour chacune de ces deux droites, indiquer si elle est parallèle à l'axe des ordonnées.
3. Transformer l'équation de la droite (d_1) sous la forme $x=k$.
4. Transformer l'équation de la droite (d_2) sous la forme $y=mx+p$.
5. Que peut-on dire du vecteur de coordonnées $(1\ ;\ m)$. pour la droite (d_2) ?
6. Une des deux droites représente une fonction affine f. Laquelle ? Préciser quelle fonction affine.

Lire le cours de la propriété 12.4 page 147 à la propriété 12.7.

Exercice 12.19

Tracer un repère, puis tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations réduites :

$(d_1)\quad x=-5 \qquad (d_2)\quad y=3x-1.$

Dans le cours, voir les exemples 12.8, 12.9, 12.10 page 148.

Exercice 12.20

Tracer un repère, puis tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations réduites :

$(d_1)\quad x = 3\qquad (d_2)\quad y = -4x + 5\qquad (d_3)\quad y = 2x\qquad (d_4)\quad y = 6$

Exercice 12.21

Tracer un repère, puis tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations réduites :

$(d_1)\quad y = 5x - 3\qquad (d_2)\quad y = -2x + 4\qquad (d_3)\quad y = -x + 8\qquad (d_4)\quad y = x - 7$

Exercice 12.22

Tracer un repère, puis tracer les (d_1) et (d_2) d'équations réduites :

$(d_1)\quad y = \dfrac{3}{4}x + 6\qquad (d_2)\quad y = -\dfrac{1}{7}x - 2.$

Exercice 12.23 (Pente d'une droite)

Chacune des équations réduites de droites ci-dessous est sous la forme $y = mx + p$.

Pour chacune d'elles indiquer la pente m de la droite.

1. $(d_1)\quad y = 5x - 8$ **2.** $(d_2)\quad y = -3x + 7$ **3.** $(d_3)\quad y = x - 6$

4. $(d_4)\quad y = \dfrac{2}{5}x + 9$ **5.** $(d_5)\quad y = 4$ **6.** $(d_6)\quad y = -x$

7. $(d_7)\quad y = 2 - 9x$ **8.** $(d_8)\quad y = 10 + x$

12.3.b Équation réduite et équation cartésienne

Exercice 12.24

On donne ci-dessous les équations cartésiennes de deux droites (d_1) et (d_2).

$(d_1)\quad -12x + 3y + 15 = 0\qquad (d_2)\quad 8x + 48 = 0$

1. Transformer ces deux équations en équations réduites, c'est à dire sous la forme $y = mx + p$ ou $x = k$. Dans le cours, voir les exemples 12.11 et 12.12 page 149.
2. Tracer un repère et tracer les droites (d_1) et (d_2).

Exercice 12.25

On donne ci-dessous les équations cartésiennes de deux droites (d_1) et (d_2).

$(d_1)\quad 7x - 28 = 0\qquad (d_2)\quad 15x + 5y - 10 = 0$

Transformer ces deux équations en équations réduites.

Exercice 12.26

On donne ci-dessous les équations réduites de deux droites (d_1) et (d_2).

$(d_1)\quad x = -7\qquad (d_2)\quad y = 6x - 9$

Transformer ces deux équations en équations cartésiennes.

Exercice 12.27

Transformer les équations réduites ci-dessous en équations cartésiennes.

1. $y = 1,5x + 9$ **2.** $x = 12$ **3.** $y = -6$ **4.** $y = \dfrac{2}{3}x - 7$

12.3.c Parallèles et sécantes

Exercice 12.28 (Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.)

On donne ci-dessous les équations réduites de plusieurs droites.

(d_1) $x = -4$ (d_2) $x = 5$ (d_3) $y = 2x + 1$ (d_4) $y = 2x - 3$ (d_5) $y = 4x - 5$

Pour chaque question ci-dessous, indiquer si les deux droites sont parallèles ou sécantes.

1. (d_1) et (d_2) **2.** (d_1) et (d_3) **3.** (d_3) et (d_4) **4.** (d_3) et (d_5)

Exercice 12.29 (Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes (1))

Les droites (d_1) et (d_2) ont pour équations réduites : (d_1) $y = 2x + 3$ (d_2) $y = 4x + 1$

1. Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.
2. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection, qui sera nommé K.

Exercice 12.30

Les droites (d_1), (d_2), (d_3) ont pour équations réduites :

(d_1) $y = x + 8$ (d_2) $y = -3x + 4$ (d_3) $x = 3$

1. a) Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.
   b) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection, qui sera nommé P.
2. a) Justifier que les droites (d_2) et (d_3) sont sécantes.
   b) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection, qui sera nommé R.

Exercice 12.31 (Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes (2))

Les droites (d_1) et (d_2) ont pour équations réduites : (d_1) $x = -2$ (d_2) $y = 0,5x + 5$

1. Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.
2. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection, qui sera nommé L.

12.3.d Déterminer une équation réduite de droite

Exercice 12.32 (Équation de droite à partir d'un point et la pente (1))

Calculer l'équation réduite de la droite (d) passant par le point $A\,(-2\ ;\ -3)$ et de pente 4.

Dans le cours, voir l'exemple 12.17 page 150.

Exercice 12.33 (Équation de droite à partir d'un point et la pente (2))

Calculer l'équation réduite de la droite (d) passant par le point $A\,(1\ ;\ 5)$ et de pente -3.

Exercice 12.34 (Équation de droite à partir de deux points (1))

1. Tracer un repère, placer les points $A\,(-1\ ;\ -3)$, $B\,(2\ ;\ 3)$, $C\,(-1\ ;\ 5)$, puis tracer les droites droites (AB) et (AC).
2. Calculer les équations réduites des droites (AB) et (AC). Dans le cours, voir les exemples 12.18 et 12.19 page 151.
3. Pour la droite (AB), on peut vérifier avec la calculatrice.

Exercice 12.35 (Équation de droite à partir de deux points (2))

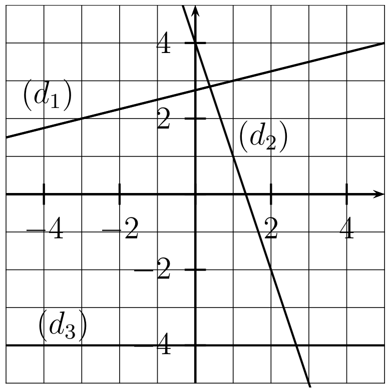
1. Tracer un repère, placer les points $A\,(4\ ;\ -4)$, $B\,(4\ ;\ 3)$, $C\,(-2\ ;\ -1)$, puis tracer les droites droites (AB) et (AC).
2. Calculer les équations réduites des droites (AB) et (AC).

Exercice 12.36

1. Tracer un repère, placer les points $A(-1\ ;\ 5)$ $B(2\ ;\ -4)$ $C(2\ ;\ 4)$, puis tracer les droites (AB) et (BC).
2. Calculer les équations réduites des droites (AB) et (BC).

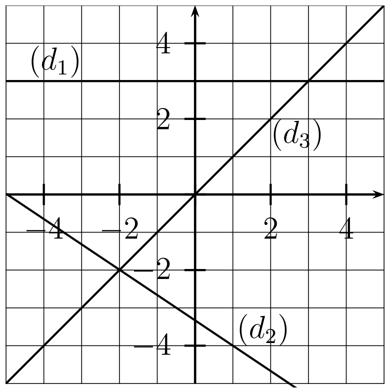
Exercice 12.37 (Déterminer graphiquement la pente d'une droite (1))

Déterminer les pentes des droites (d_1), (d_2), (d_3) tracées ci-contre.



Exercice 12.38 (Déterminer graphiquement la pente d'une droite (2))

Déterminer les pentes des droites (d_1), (d_2), (d_3) tracées ci-contre.



Exercice 12.39

1. Tracer un repère, placer les points $A\,(-1\ ;\ -4)$, $B\,(1\ ;\ 2)$, $C\,(2\ ;\ 4)$.
2. Calculer l'équation réduite de la droite (AB).
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier.

12.4 Application aux droites remarquables d'un triangle

Exercice 12.40

1. Tracer un repère et placer les points $A\,(-3\ ;\ -1)$, $B\,(-1\ ;\ 9)$, $D\,(9\ ;\ -1)$, $K\,(3\ ;\ 3)$, puis tracer le triangle ABD.
2. Tracer le cercle (C) de centre K qui passe par le point A. Que constate-t-on pour ce cercle ? Le démontrer par des calculs.
3. Tracer h_B la hauteur issue de B, c'est à dire la perpendiculaire à (AD) qui passe par B, puis donner sans justifier l'équation réduite de cette droite.
4. Tracer la droite h_A d'équation : $y = x + 2$. On admet que cette droite est la hauteur issue de A, c'est à dire la perpendiculaire à (BD) qui passe par A.
5. Placer le point H intersection des hauteurs issues de A et de B, puis calculer ses coordonnées.
6. Placer E et F les milieux respectifs de $[BD]$ et $[AB]$, puis tracer les droites (AE) et (DF) qui se coupent en G.
7. Justifier que l'équation réduite de la droite (HK) est : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.
8. On admet que les coordonnées de G sont $G\left(\dfrac{5}{3}\ ;\ \dfrac{7}{3}\right)$. Démontrer que G, H, K sont alignés.

II Cours

12.0 Programme

Contenus

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités attendues

- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- Établir que trois points sont alignés ou non.
- Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.
- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Déterminer une équation de droite à partir d'un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.

Démonstrations

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Exemple d'algorithme

- Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
- Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

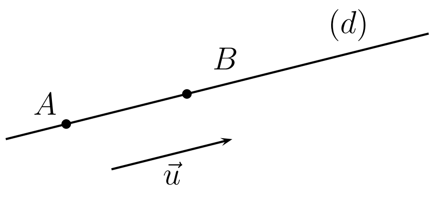
Approfondissements possibles

- Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.

12.1 Vecteur directeur d'une droite.

Définition 12.1

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est vecteur directeur d'une droite (d) signifie qu'il existe deux points A et B de la droite (d) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

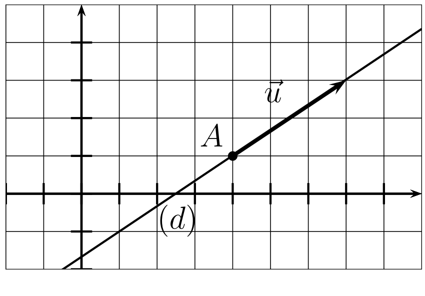


Exemple 12.1 (Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.)

Dans un repère, placer le point $A\,(4\ ;\ 1)$ et tracer la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(3\ ;\ 2)$.

Sur la figure ci-contre,

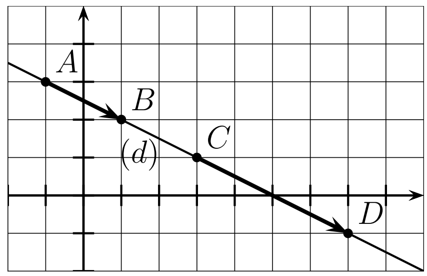
- on place le point $A\,(4\ ;\ 1)$;
- on trace le vecteur $\vec{u}$ à partir du point A ;
- on trace la droite (d).



Exemple 12.2 (Vecteur directeur d'une droite donnée par une représentation graphique.)

Déterminer un vecteur directeur de la droite (d) tracée ci-contre.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\,(2\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur de la droite (d).
On peut aussi prendre $\overrightarrow{CD}\,(4\ ;\ -2)$.

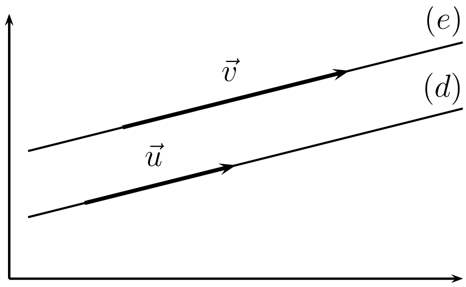


On a déja vu aux chapitres 2 et 10 que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, autrement dit on a la propriété ci-dessous.

Propriété 12.1 (Vecteurs directeurs de deux droites parallèles)

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exemple 12.3
Sur la figure ci-contre, les droites (d) et (e) sont parallèles et leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



12.2 Équation cartésienne d'une droite

Propriété 12.2

Dans un repère du plan, toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où les nombres a et b ne sont pas tous les deux égaux à zéro.

Définition 12.2

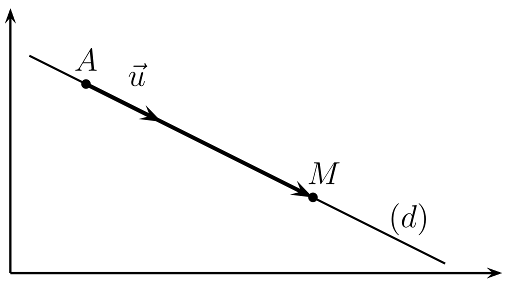
Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ s'appelle une équation cartésienne.

Propriété 12.3

Dans un repère du plan, une droite d'équation $ax+by+c = 0$ a un vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\vec{u}\,(-b\ ;\ a)$.

Démonstration des propriétés 12.2 et 12.3
Dans un repère du plan, dire qu'un point $M\,(x\ ;\ y)$ appartient à une droite (d) passant par un point $A\,(x_A\ ;\ y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(\alpha\ ;\ \beta)$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont :

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{AM} & (x - x_A\ ;\ y - y_A) \\ \vec{u} & (\alpha\ ;\ \beta) \end{array}$$



Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ est donc égal à : $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ est égal à zéro. On a donc :

$$\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0 \iff \beta x - \beta x_A - \alpha y + \alpha y_A = 0 \iff \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0\ .$$

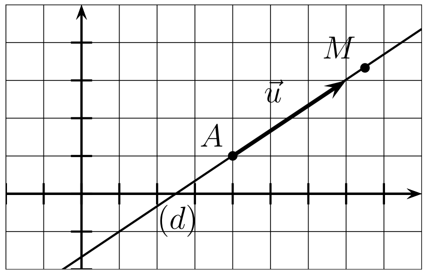
On obtient donc bien une équation une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_A + \alpha y_A$.

Le vecteur directeur $\vec{u}\,(\alpha\ ;\ \beta)$ est une vecteur non nul, donc α et β ne sont pas tous les deux nuls, donc a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Enfin pour les coordonnées α et β du vecteur directeur $\vec{u}$, on a $a = \beta$ et $b = -\alpha$, par conséquent $\alpha = -b$ et $\beta = a$, donc les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ sont $\vec{u}\,(-b\ ;\ a)$.

Exemple 12.4 (Équation de droite à partir d'un point et un vecteur directeur.)

Reprenons l'exemple 12.1, et calculons une équation cartésienne de la droite (d) passant par $A\,(4\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(3\ ;\ 2)$.



1^re^ méthode

Pour un point $M\,(x\ ;\ y)$ de la droite (d) les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc leur déterminant est nul.

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{AM} & (x-4\ ;\ y-1) \\ \vec{u} & (\ \ 3\ ;\ 2) \end{array}$$

$2 \times (x - 4) - 3 \times (y - 1) = 0 \iff 2x - 8 - 3y + 3 = 0 \iff \boxed{2x - 3y - 5 = 0}$.

2^e^ méthode

On sait qu'une équation cartésienne de la droite (d) est de la forme $ax + by + c = 0$ et qu'un vecteur directeur a comme coordonnées $\vec{u}\,(-b\ ;\ a)$.

Or, ici, on a : $\vec{u}\,(3\ ;\ 2)$, donc, $a = 2$ et $b = -3$, donc, on obtient l'équation : $2x - 3y + c = 0$.

Or les coordonnées du point $A\,(4\ ;\ 1)$ vérifient cette équation, donc :

$2 \times 4 - 3 \times 1 + c = 0 \iff 5 + c = 0 \iff c = -5$.

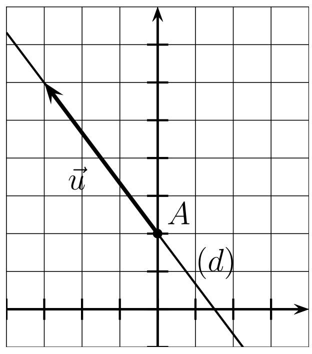
On obtient finalement : $\boxed{2x - 3y - 5 = 0}$.

Exemple 12.5 (Tracer une droite connaissant son équation cartésienne (1))

On veut tracer la droite d'équation : $4x + 3y - 6 = 0$.

Il nous faut les coordonnées d'un point et les coordonnées d'un vecteur directeur.

- On choisit une valeur de x et on calcule y.
  Par exemple, choisissons $x = 0$:
  $$4 \times 0 + 3y - 6 = 0 \iff 3y - 6 = 0 \iff 3y = 0 + 6 = 6$$
  $$\iff y = \frac{6}{3} = 2$$
  On a donc les coordonnées d'un point $A(0\ ;\ 2)$.
- D'après l'équation $4x + 3y - 6 = 0$, les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\vec{u}(-3\ ;\ 4)$.
- On trace le vecteur $\vec{u}$ à partir du point A, et on trace la droite (d).

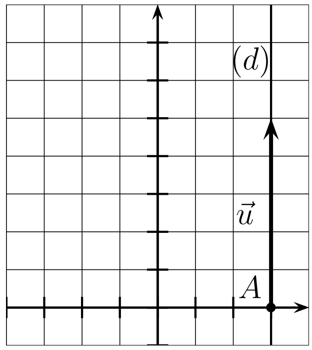


Exemple 12.6 (Tracer une droite connaissant son équation cartésienne (2))

On veut tracer la droite d'équation : $5x - 15 = 0$.

Il nous faut les coordonnées d'un point et les coordonnées d'un vecteur directeur.

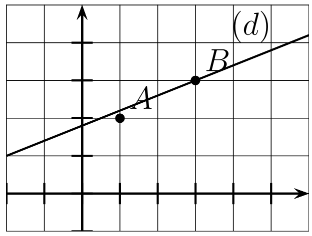
- On résout l'équation $5x - 15 = 0$.
  $5x - 15 = 0 \iff 5x = 15 \iff x = \frac{15}{5} = 3$
  On place un point d'abscisse $x = 3$, par exemple $A(3~;~0)$.
- D'après l'équation $5x - 15 = 0$, les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\vec{u}(0~;~5)$.
- On trace le vecteur $\vec{u}$ à partir du point A, et on trace la droite (d).



Exemple 12.7 (Vérifier si un point appartient à une droite)

Vérifions si les points $A(1~;~2)$ et $B(3~;~3)$ appartiennent à la droite d'équation $-2x + 5y - 9 = 0$.

- Point A : $-2\times1+5\times2-9 = -1 \neq 0$ donc le point A n'appartient pas à la droite (d).
- Point B : $-2 \times 3 + 5 \times 3 - 9 = 0$ donc le point B appartient à la droite (d).



12.3 Équation réduite d'une droite

12.3.a Définition, propriété, et tracé

Propriété 12.4

Dans un repère du plan,
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$.
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$.

Définition 12.3

L'équation $x = k$ pour une droite parallèle à l'axe des ordonnées, et l'équation $y = mx + p$ pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées s'appellent **équation réduite** de la droite.

Propriété 12.5

Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation réduite $y = mx + p$, est la représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

Propriété 12.6

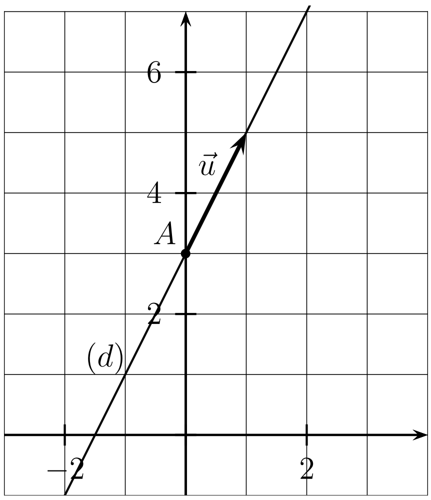
Pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées et son équation réduite $y = mx + p$,
- le coefficient m s'appelle le coefficient directeur ou la pente de la droite ;
- le coefficient p s'appelle l'ordonnée à l'origine de la droite.

Propriété 12.7

Pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation réduite $y = mx + p$, un vecteur directeur de cette droite est le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\vec{u}(1~;~m)$.

Exemple 12.8 (Tracer une droite connaissant son équation réduite (1))

Tracer la droite (d) d'équation $y = 2x + 3$.

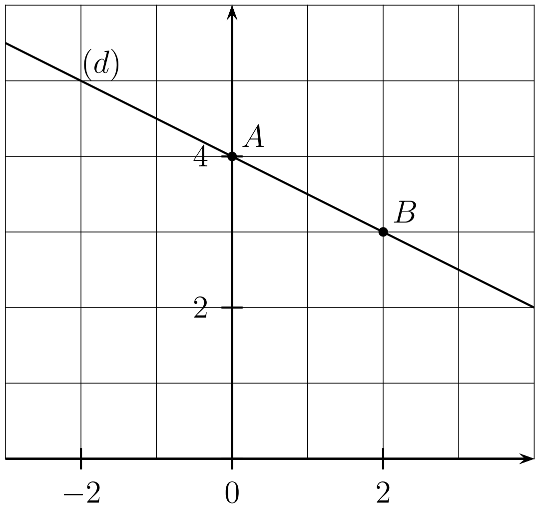


1^re méthode : un point et un vecteur directeur.

- On choisit une valeur de x et on calcule y.
  Par exemple, choisissons $x = 0$:
  $y = 2 \times 0 + 3 = 3$.
  On a donc les coordonnées d'un point : $A(0\ ;\ 3)$.
- L'équation réduite est $y = 2x+3$, et d'après la propriété 12.7, les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\vec{u}(1\ ;\ 2)$.
- On trace le vecteur $\vec{u}$ à partir du point A, et on trace la droite (d).

Exemple 12.9 (Tracer une droite connaissant son équation réduite (2))

Tracer la droite (d) d'équation $y = -0,5x + 4$.



2^e méthode : deux points.

- On choisit deux valeurs de x et on calcule y chaque fois, et cela va nous donner les les coordonnées de deux points A et B.
  $x = 0 \quad y = -0,5 \times 0 + 4 = 4 \quad A(0\ ;\ 4)$
  $x = 2 \quad y = -0,5 \times 2 + 4 = 3 \quad B(2\ ;\ 3)$
- On place les points A et B et on trace la droite (AB) qui est la droite (d).

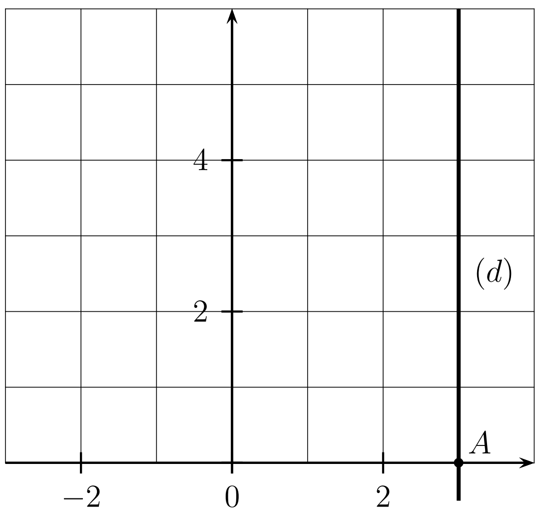
Remarque 12.1 (Tracer à la calculatrice une droite d'équation $y = mx + p$)

La propriété 12.5 indique que la droite d'équation $y = mx + p$ est la représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

On peut donc vérifier les exemples 12.8 et 12.9 à la calculatrice.

Exemple 12.10 (Tracer une droite connaissant son équation réduite (3))

Tracer la droite (d) d'équation $x = 3$.



On sait que $x = k$ est l'équation réduite d'une droite parallèle à l'axe de ordonnées c'est à dire une droite verticale.

On place le point A de coordonnées $A(3\ ;\ 0)$ et on trace la droite verticale qui passe par ce point.

12.3.b Équation réduite et équation cartésienne

Exemple 12.11 (Transformer une équation cartésienne en une équation réduite (1))

Transformer l'équation cartésienne $3x+2y-9=0$ en une équation réduite.

$3x+2y-9=0 \iff 2y=-3x+9 \iff y=\dfrac{-3x+9}{2} \iff y=\dfrac{-3x}{2}+\dfrac{9}{2} \iff \boxed{y=-1,5x+4,5}$

Exemple 12.12 (Transformer une équation cartésienne en une équation réduite (2))

Transformer l'équation cartésienne $5x-8=0$ en une équation réduite.

$5x-8=0 \iff 5x=8 \iff x=\dfrac{8}{5} \iff \boxed{x=1,6}$

Exemple 12.13 (Transformer une équation réduite en une équation cartésienne (1))

Transformer l'équation réduite $y=5x-7$ en une équation cartésienne.

$y=5x-7 \iff 5x-7=y \iff \boxed{5x-y-7=0}$

Exemple 12.14 (Transformer une équation réduite en une équation cartésienne (2))

Transformer l'équation réduite $x=6$ en une équation cartésienne.

$x=6 \iff \boxed{x-6=0}$

12.3.c Parallèles et sécantes

Propriété 12.8

- Deux droites d'équations $x=k$ et $x=k'$ sont parallèles.
- Deux droites d'équations $x=k$ et $y=mx+p$ sont sécantes.
- Deux droites d'équations $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs m et m' sont égaux.

Exemple 12.15 (Point d'intersection de deux droites sécantes (1).)

Justifions que les droites (d_1) et (d_2) d'équations réduites $y=3x-2$ et $y=-2x+8$ sont sécantes et déterminons leur point d'intersection.

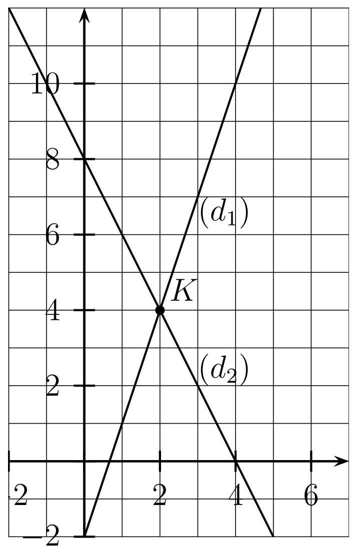
Les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes parce qu'elles n'ont pas le même coefficient directeur.

Nommons K le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2), et calculons ses coordonnées.
Le point K a des coordonnées $(x\ ;\ y)$ qui vérifient à la fois les deux équations réduites de (d_1) et (d_2).
On résout donc l'équation $3x-2=-2x+8$.

$$\begin{aligned} 3x-2=-2x+8 &\iff 3x+2x=8+2 \iff 5x=10 \\ &\iff x=\frac{10}{5} \iff x=2 \end{aligned}$$

Pour calculer y, on remplace x par sa valeur dans une des deux équations : $y=3x-2=3\times 2-2=4$.

Donc les coordonnées du point K sont : $\boxed{K\,(2\ ;\ 4)}$.



Exemple 12.16 (Point d'intersection de deux droites sécantes (2).)

Justifions que les droites (d_1) et (d_3) d'équations réduites $y = 3x - 2$ et $x = 4$ sont sécantes et déterminons leur point d'intersection.

Les droites (d_1) et (d_3) sont sécantes parce que deux droites d'équations $x = k$ et $y = mx + p$ sont sécantes.

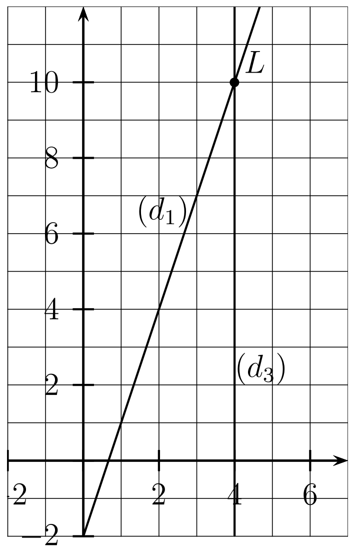
Nommons L le point d'intersection des droites (d_1) et (d_3), et calculons ses coordonnées.

Le point L a des coordonnées $(x\ ;\ y)$ qui vérifient à la fois les deux équations réduites de (d_1) et (d_3).

Puisque $L \in (d_3)$, on a : $x = 4$

Pour calculer y, on remplace x par sa valeur dans l'équation de d_1 :
$y = 3x - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$.

Donc les coordonnées du point L sont : $\boxed{L\,(4\ ;\ 10)}$.



12.3.d Déterminer une équation réduite de droite

Exemple 12.17 (Déterminer une équation de droite à partir d'un point et la pente.)

Calculons l'équation réduite $y = mx + p$ de la droite passant par $A\,(-1\ ;\ -2)$ et de pente 3.

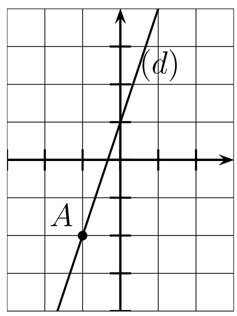
La pente est le coefficient directeur, donc $m = 3$ par conséquent l'équation réduite est : $y = 3x + p$.

On sait que le point A appartient à cette droite, donc ses coordonnées vérifient l'équation réduite.

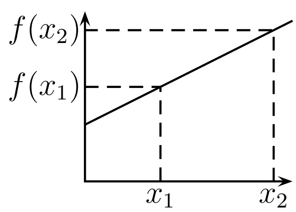
On a donc :

$$\begin{aligned} -2 = 3 \times (-1) + p \iff& -2 = -3 + p \iff -3 + p = -2 \\ \iff& p = -2 + 3 \iff p = 1 \end{aligned}$$

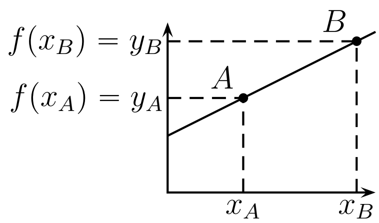
Donc, l'équation réduite est : $\boxed{y = 3x + 1}$.



Dans le chapitre 6, la propriété 6.2 indiquait que pour deux nombres différents x_1 et x_2 et une fonction affine, définie par $f(x) = mx + p$, on a :
$m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$



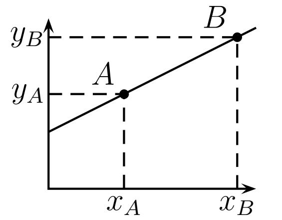
Donc pour deux points $A\,(x_A\ ;\ y_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B)$ et la droite (AB) d'équation réduite $y = mx + p$, on a $m = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$, or $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$.



On a donc la propriété page suivante.

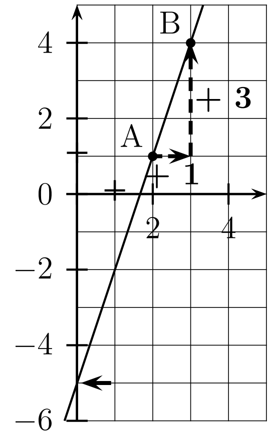
Propriété 12.9

Pour une droite (AB) d'équation réduite $y = mx+p$, on a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



Exemple 12.18 (Déterminer une équation de droite à partir de deux points (1))

Déterminons l'équation réduite de la droite (AB) pour les points $A(2\ ;\ 1)$ et $B(3\ ;\ 4)$.



- Les deux points A et B n'ont pas la même abscisse, donc la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc l'équation réduite de la droite (AB), est sous la forme $y = mx + p$.
- Calcul du coefficient directeur m :
  $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-1}{3-2} = \dfrac{3}{1} = 3$
- L'équation réduite de la droite (AB) est donc : $y = 3x + p$
- Calcul de l'ordonnée à l'origine p : on remplace x et y par les coordonnées de $A\,(2\ ;\ 1)$ dans l'équation $y = 3x + p$:
  $$\begin{aligned} 1 = 3\times 2 + p &\iff 3\times 2 + p = 1 \\ &\iff 6 + p = 1 \\ &\iff p = 1 - 6 = -5 \end{aligned}$$
- Donc l'équation réduite de la droite (AB) est :
  $y = 3x + (-5)$ soit $\boxed{y = 3x - 5}$

Vérification avec la calculatrice

Avec la calculatrice Numworks, on peut obtenir l'équation réduite de cette droite.

Aller dans le module Régressions et compléter ainsi avec les coordonnées de A et B :

X1	Y1
2	1
3	4

Aller sur l'onglet Graphique. Au bas de l'écran on lit : y=ax+b a=3 b=-5

On retrouve bien l'équation : $y = 3x - 5$.

Exemple 12.19 (Déterminer une équation de droite à partir de deux points (2))

Déterminons l'équation réduite de la droite (AB) pour les points $A(6\ ;\ 1)$ et $B(6\ ;\ 4)$.

Les deux points A et B ont la même abscisse $x = 6$, donc la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées, par conséquent l'équation réduite de la droite (AB), est $\boxed{x = 6}$.