Chapitre 8

Produit scalaire de vecteurs

I Exercices

8.1 Définition et conséquences

Avant de commencer ce premier exercice, lire dans le cours la définition 8.4 page 120.

Exercice 8.1

1. **a)** Pour chacune des figures 8.1 à 8.4, calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.
   b) Que constate-t-on par rapport à l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
2. Pour chacune des figures 8.1 et 8.2, calculer le produit scalaire $\vec{v}.\vec{u}$. Que constate-t-on par rapport au produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$?
3. **a)** Pour les figures 8.1 et 8.5, le vecteur $\vec{v}$ est le même. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?
   b) Calculer $\vec{v}.\vec{w}$, que constate-t-on par rapport à $\vec{u}.\vec{v}$?

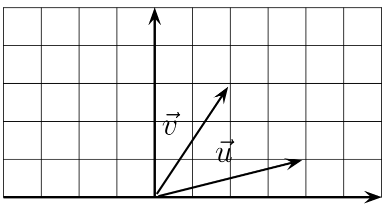


Fig. 8.1

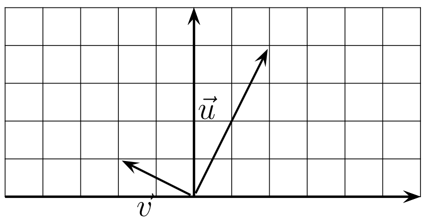


Fig. 8.2

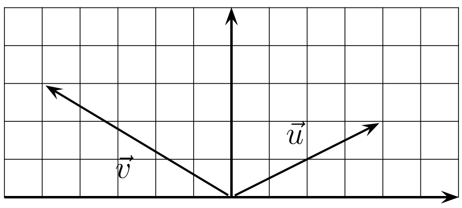


Fig. 8.3

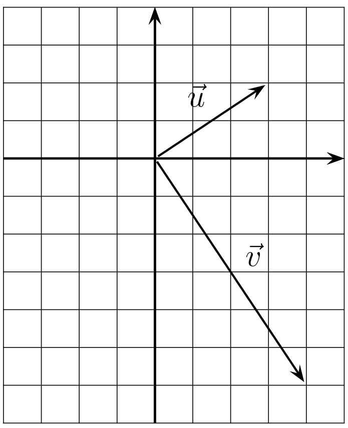


Fig. 8.4

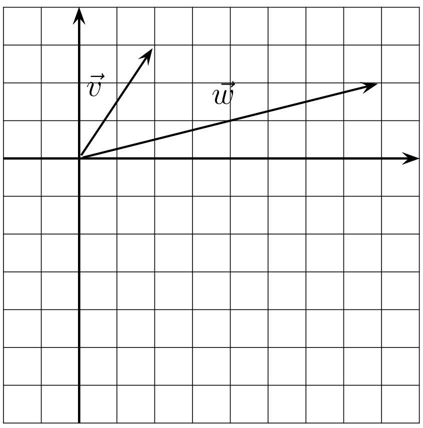


Fig. 8.5

Exercice 8.2 (Carré scalaire)

Justifier par un calcul littéral que pour un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ dans une base orthonormée on a : $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

C'est dans le cours, mais on essaiera de trouver tout seul.

Exercice 8.3 (Produit scalaire de 2 vecteurs colinéaires)

Dans la figure 8.6, les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $\vec{u}\,(4\ ;\ 3)$ et $\vec{v}\,(8\ ;\ 6)$.

Dans la figure 8.7, les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $\vec{u}\,(-4\ ;\ -3)$ et $\vec{v}\,(8\ ;\ 6)$

1. Pour les figures 8.6 et 8.7,
   a) justifier par un calcul de déterminant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
   b) calculer chaque fois $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, et $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
2. Que constate-t-on pour le produit scalaire selon que les vecteurs sont de même sens ou non ?

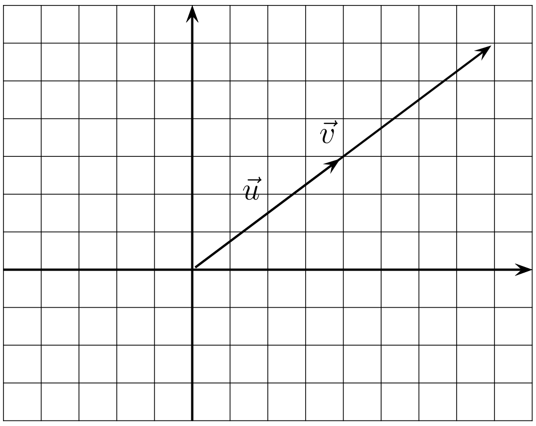


Fig. 8.6

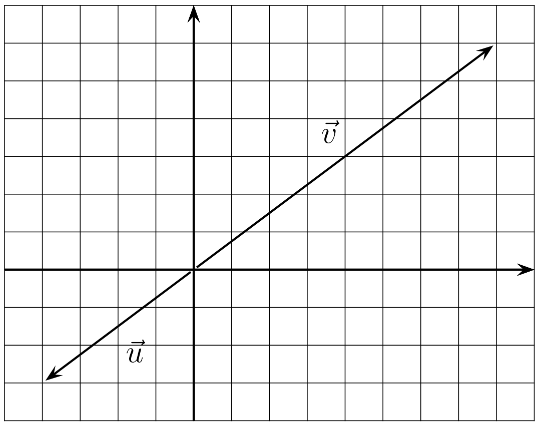


Fig. 8.7

Dans le cours, lire les propriétés 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.7, page 120.

8.2 Produit scalaire et projeté orthogonal

Exercice 8.4

A, B, C sont trois points du plan. Le point H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Voir figures 8.8 et 8.9 ci-dessous.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ (indication : décomposer $\overrightarrow{AB}$ en une somme de vecteurs).
2. Dans les deux figures ci-dessous, on donne les distances suivantes : $AC = 9$ et $AH = 4$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ pour chacune des deux figures.

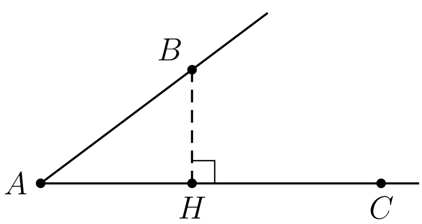


Fig. 8.8

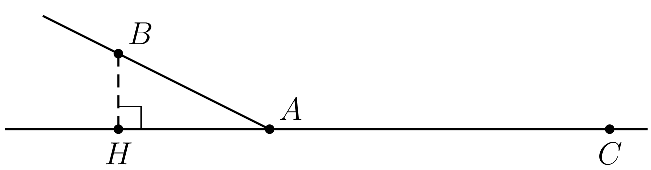


Fig. 8.9

Dans le cours, lire la définition 8.7 et les propriétés 8.8 et 8.9, page 122.

8.3 Produit scalaire et cosinus

Dans le cours, lire la propriété 8.10 page 123.

Exercice 8.5

Dans les deux cas suivants, tracer la figure puis calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

1. A, B, C sont trois points tels que $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$.
2. A, B, C sont trois points tels que $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$.

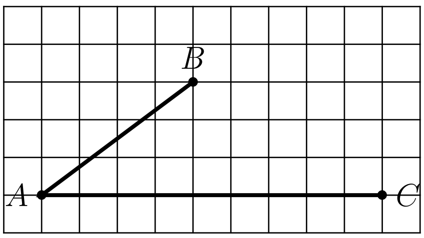
8.4 Exercices d'application

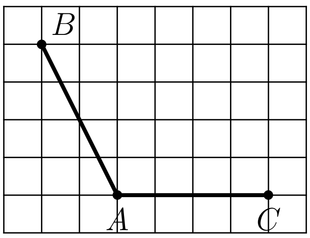
Exercice 8.6

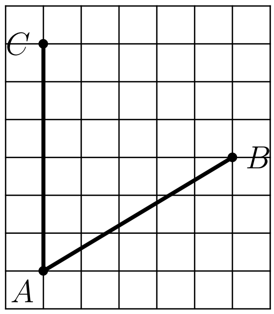
1. Dans un repère orthonormé, placer les points $A\ (-3\ ;\ -2)$ $\quad B\ (4\ ;\ 1)$ $\quad C\ (-2\ ;\ 3)$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
4. Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

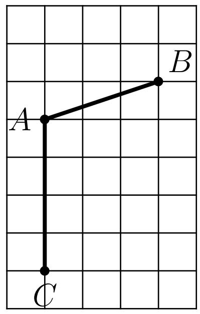
Exercice 8.7

Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. On prendra comme unité un carreau du quadrillage.









Exercice 8.8

1. Dans un repère orthonormé placer les points $A\ (-3\ ;\ -2)$, $B\ (4\ ;\ 5)$, $C\ (3\ ;\ 1)$, puis construire le point H projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
2. Calculer la distance AH (valeur exacte).

Exercice 8.9

1. Dans un repère orthonormé placer les points $A\ (-3\ ;\ -1)$, $B\ (-2\ ;\ 2)$, $C\ (3\ ;\ -3)$, $D\ (1\ ;\ 1)$,
2. Que peut-on dire de droites (AB) et (AC) ? Justifier.
3. Que peut-on dire de droites (AC) et (BD) ? Justifier.

Exercice 8.10

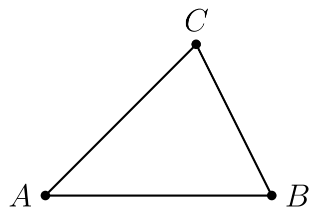
1. Tracer un repère orthonormé, placer les points $A\ (-4\ ;\ 3)$, $B\ (6\ ;\ 6)$, $C\ (-6\ ;\ -2)$, et tracer le triangle (ABC).
2. Calculer une mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir au dixième près.
   Indication : utiliser deux façons de calculer le produit scalaire.

Exercice 8.11

Développer $(\vec{u}+\vec{v})^2$.

Exercice 8.12 (Une 4e façon de calculer le produit scalaire)

Le triangle ABC est tel que : $AB = 7$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 4$ cm (la figure n'est pas en vraie grandeur).



1. Développer $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2$.
2. Sachant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$, en déduire une égalité entre BC, AB, AC et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
3. Écrire alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de BC, AB, AC, et calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Dans le cours, lire les propriétés 8.11, 8.12, 8.13, page 123, et leurs démonstrations.

Exercice 8.13

1. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 8$ cm $\quad AC = 7$ cm $\quad BC = 5$ cm.
2. Calculer en degrés l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir au dixième de degré.

Exercice 8.14

1. Tracer un triangle ABC isocèle de sommet principal A tel que $AB = 6$ cm et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.
2. Calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer BC. Arrondir au centième près.

Exercice 8.15

1. Construire un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm $\quad AC = 6$ cm $\quad BC = 8$ cm.
2. Construire le point H, projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
3. Calculer AH.
4. Calculer la valeur exacte de l'aire (ABC).

Exercice 8.16

1. Tracer un segment $[AB]$ de 6 cm, placer son milieu I, et tracer le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
2. Placer trois points M_1, M_2, M_3, tels que $IM_1 = 2$ cm, $IM_2 = 3$ cm, $IM_3 = 5$ cm.
3. Sachant que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$, développer $(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$, afin d'écrire le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de MI et AB.
4. En déduire les calculs des produits scalaires $\overrightarrow{M_1A}.\overrightarrow{M_1B}$, $\overrightarrow{M_2A}.\overrightarrow{M_2B}$, $\overrightarrow{M_3A}.\overrightarrow{M_3B}$.
5. Lorsque le point M est distinct des points A et B, et que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, que peut-on dire du triangle AMB ? Justifier.

II Cours

8.0 Programme

Contenus

- Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus. Caractérisation de l'orthogonalité.
- Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.
- Développement de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$. Formule d'Al-Kashi.
- Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Capacités attendues

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

Démonstrations

- Formule d'Al-Kashi (démonstration avec le produit scalaire).
- Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ (démonstration avec le produit scalaire).

Approfondissements possibles

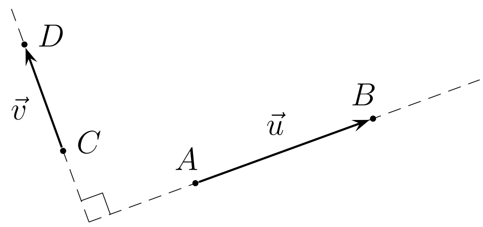
- Loi des sinus.
- Droite d'Euler d'un triangle.
- Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.

8.1 Définition et conséquences

Définition 8.1 (Vecteurs orthogonaux (rappel))

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie que

- ces deux vecteurs sont nuls ;
- ou qu'un des deux vecteurs est nul ;
- ou que les deux vecteurs sont non nuls et qu'il existe des points A, B, C, D, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et tels que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires (figure ci-contre).



Définition 8.2 (Norme d'un vecteur (rappel))

La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est sa longueur, et on la note : $\|\vec{u}\|$.
La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc la longueur AB ou la distance AB : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Définition 8.3 (Base orthonormée (rappel))

Une base orthonormée du plan est formée de deux vecteurs orthogonaux et de même norme.

Propriété 8.1 (Calculer la norme d'un vecteur (rappel))

Pour un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, sa norme s'écrit $\|\vec{u}\|$, et on a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition 8.4 (Produit scalaire dans une base orthonormée)

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\,(x'\ ;\ y')$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan, leur produit scalaire est égal à $xx' + yy'$ et il est noté $\vec{u}.\vec{v}$

Propriété 8.2 (Commutativité)

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Démonstration : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v}.\vec{u}$.

Propriété 8.3 (Carré scalaire)

Pour un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on a : $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Démonstration : $\vec{u}.\vec{u} = xx + yy = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$.

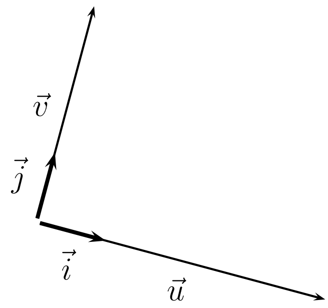
Propriété 8.4 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Démonstration

On sait, d'après la définition 8.1, que pour deux vecteurs, si l'un des deux au moins est le vecteur nul, ces deux vecteurs sont orthogonaux.

D'autre part, pour deux vecteurs, si l'un des deux est le vecteur nul, alors ses coordonnées sont $(0\ ;\ 0)$, et le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul.
Si les deux vecteurs sont nuls, leur produit scalaire est aussi nul.



Étudions maintenant le cas de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
J'appelle alors $\vec{i}$ le vecteur de norme 1, colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens, ainsi $\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\vec{i}$.
Soit $\vec{j}$ un vecteur de norme 1 et orthogonal à $\vec{i}$ de telle sorte que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.
Les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont $(\|\vec{u}\|\ ;\ 0)$.

Si le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$, alors il est colinéaire à $\vec{j}$ et les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont $(0\ ;\ y')$.
Ainsi $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times 0 + 0 \times y' = 0$

On a donc prouvé que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors leur produit scalaire est nul.

Réciproquement si le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, on a : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Or les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont $(x'\ ;\ y')$, donc $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times x' + 0 \times y' = \|\vec{u}\| \times x'$

Par conséquent $\|\vec{u}\| \times x' = 0$

or $\|\vec{u}\| \neq 0$, donc $x' = 0$, donc le vecteur $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{j}$, donc, il est orthogonal à $\vec{u}$.

Propriété 8.5

> Pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, et pour un réel k, on a les égalités :
> $(k\,\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$ et $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Démonstration

Supposons que, dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, soient $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$, $\vec{v}\,(x'\ ;\ y')$, $\vec{w}\,(x''\ ;\ y'')$,

Démontrons d'abord l'égalité $(k\,\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées de $k\,\vec{u}$ sont $\vec{u}\,(kx\ ;\ ky)$.

Donc :

$(k\,\vec{u}).\vec{v} = kx \times x' + ky \times y' = k(xx' + yy') = k(\vec{u}.\vec{v})$

Démontrons maintenant l'égalité $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées de $\vec{v} + \vec{w}$ sont $\vec{v} + \vec{w}\,(x' + x''\ ;\ y' + y'')$.

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = x \times (x' + x'') + y \times (y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' = xx' + yy' + xx'' + yy'' = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Définition 8.5 (Vecteurs colinéaires (rappel))

> Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou qu'il existe un nombre k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$

Définition 8.6 (Déterminant de deux vecteurs du plan (rappel))

> Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\,(x'\ ;\ y')$, le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre $xy' - x'y$.
>
> $$\begin{array}{lccc} \vec{u} & (x & ; & y) \\ \vec{v} & (x' & ; & y') \end{array}$$

Propriété 8.6 (Déterminant de 2 vecteurs colinéaires (rappel))

> Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Propriété 8.7 (Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires)

- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. (fig. 1)
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. (fig. 2)

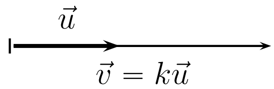


fig. 1

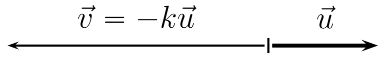


fig. 2

Démonstration

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens (fig. 1), alors il existe un réel $k > 0$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Ainsi : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{u}) = k\vec{u}.\vec{u} = k\|\vec{u}\|^2 = k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$

Or, puisque $k > 0$, on a : $k \times \|\vec{u}\| = \|k \times \vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

Donc : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires (fig. 2), alors il existe un réel $k > 0$ tel que $\vec{v} = -k\vec{u}$.

Ainsi : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.(-k\vec{u}) = -k\vec{u}.\vec{u} = -k\|\vec{u}\|^2 = -k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$

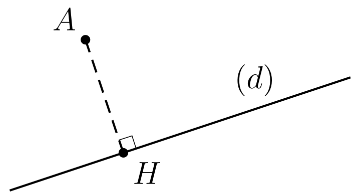
Or, puisque $k > 0$, et que dans cas, on a $\vec{v} = -k\vec{u}$, alors $\|\vec{v}\| = k \times \|\vec{u}\|$

Donc : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

8.2 Produit scalaire et projeté orthogonal

Définition 8.7 (Projeté orthogonal (rappel))

Pour un point A et une droite (d) du plan, le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H tel que la perpendiculaire à (d) passant par A coupe (d) en H.



Propriété 8.8

A, B, C sont trois points du plan et H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.

Propriété 8.9

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC \times AH$ si les points A, H, C sont alignés dans cet ordre (fig. 1) ;
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AC \times AH$ si les points H, A, C sont alignés dans cet ordre (fig. 2).

Fig. 1

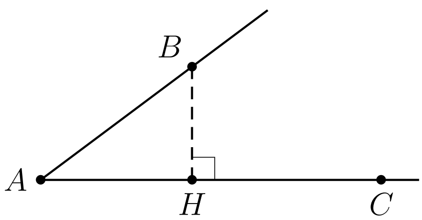
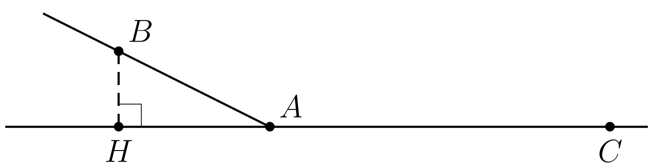


Fig. 2



Démonstration de la propriété 8.8.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}$.

Or, $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0$ parce que les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$

Démonstration de la propriété 8.9.

Si les points A, H, C sont alignés dans cet ordre comme dans la figure 1, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens, donc $= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| = AC \times AH$.

Si les points H, A, C sont alignés dans cet ordre comme dans la figure 2, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraires, donc $= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH} = -\|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| = -AC \times AH$.

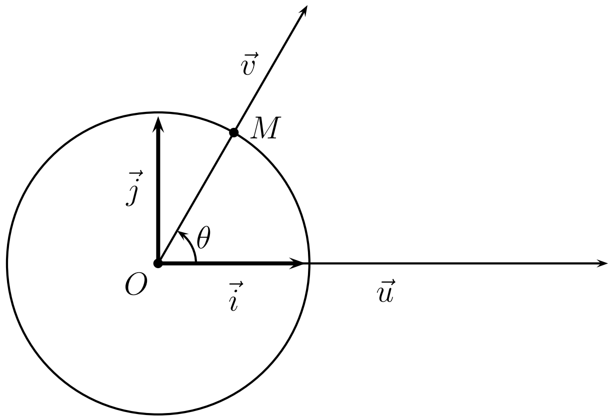
8.3 Produit scalaire et cosinus

Propriété 8.10

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, on appelle θ l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
alors : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$

Démonstration

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tracés à partir d'un point O.
J'appelle $\vec{i}$ le vecteur de norme 1, colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens, ainsi $\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\vec{i}$.
Soit $\vec{j}$ un vecteur de norme 1 et orthogonal à $\vec{i}$ de telle sorte que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.
Les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont $\vec{u}\,(\|\vec{u}\|\ ;\ 0)$.
On trace le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon, qui est donc le cercle trigonométrique du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.



La droite qui passe par O de vecteur directeur $\vec{v}$ coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en M, ainsi $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur de norme 1, colinéaire à $\vec{v}$ et de même sens, et par conséquent $\vec{v} = \|\vec{v}\|\,\overrightarrow{OM}$.

L'angle θ, qui est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aussi l'angle formé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{OM}$, donc les cordonnées du point M sont $M\,(\cos(\theta)\ ;\ \sin(\theta))$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont donc aussi $\overrightarrow{OM}\,(\cos(\theta)\ ;\ \sin(\theta))$, et celles du vecteur $\vec{v}$ sont alors $\vec{v}\,(\|\vec{v}\|\cos(\theta)\ ;\ \|\vec{v}\|\sin(\theta))$.

Nous avons donc les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}\,(\|\vec{u}\|\ ;\ 0)$ et $\vec{v}\,(\|\vec{v}\|\cos(\theta)\ ;\ \|\vec{v}\|\sin(\theta))$.

Donc : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\cos(\theta) + 0 \times \|\vec{v}\|\sin(\theta) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$

8.4 Autres propriétés

Propriété 8.11

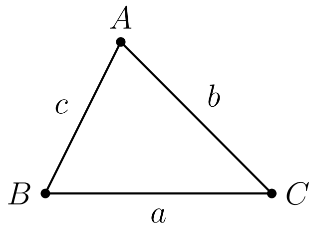
Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a l'égalité : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Démonstration

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Propriété 8.12 (Formule d'Al Kashi)

Dans un triangle ABC, on pose : $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.
Alors, on a l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\left(\widehat{A}\right)$.



Démonstration

$$\begin{aligned} BC^2 &= \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2 \\ &= AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AB^2 \end{aligned}$$

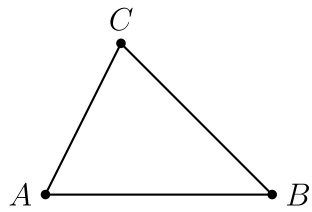
Or, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$

Et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\widehat{A}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{A}\right) = b\,c\cos\left(\widehat{A}\right)$

On a donc bien finalement $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\left(\widehat{A}\right)$

Propriété 8.13

Pour trois points A, B, C, on a l'égalité :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.



Démonstration

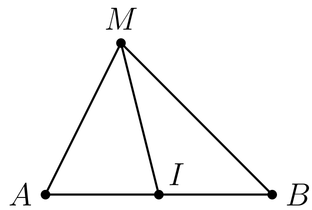
Dans la démonstration de la propriété 8.12, nous avons démontré que $BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AB^2$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AB^2 &\iff 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC^2 + AB^2 - BC^2 \\ &\iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AC^2 + AB^2 - BC^2\right) \end{aligned}$$

Propriété 8.14

Le point I est le milieu d'un segment $[AB]$ et M est un point du plan.
Alors, on a l'égalité : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$.



Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} \end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$, parce que les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés puisque I est le milieu de $[AB]$.

D'autre part, puisque $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, on a : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.(-\overrightarrow{IA}) = -\overrightarrow{IA}^2 = -IA^2$

Or, $IA = \dfrac{1}{2}AB$, donc $IA^2 = \left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times AB^2 = \dfrac{1}{4}AB^2$

Ainsi : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -\dfrac{1}{4}AB^2$

Revenons maintenant au calcul de départ.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}\\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\vec{0} - \frac{1}{4}AB^2\\ &= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2\end{aligned}$$

Propriété 8.15

Pour un segment $[AB]$, l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

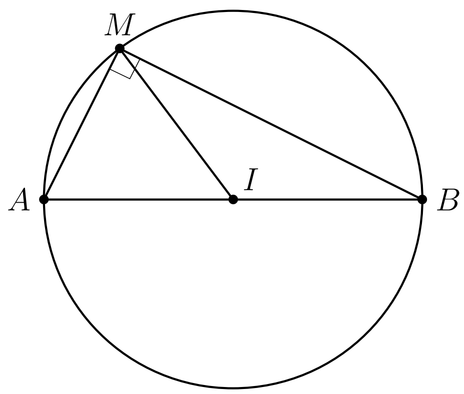


Fig. 8.10

Démonstration

Pour un segment $[AB]$, et un point M qui vérifie l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, on a :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0$ d'après la propriété 8.14.

On a : $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0 \iff MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 \iff MI^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$

Or, MI et AB sont des réels positifs, donc :

$MI^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \iff MI = \frac{1}{2}AB \iff MI = \frac{AB}{2}$.

Par conséquent, si un point M vérifie $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, alors $IM = \frac{AB}{2}$ autrement dit M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est à dire au cercle de diamètre $[AB]$.

Réciproquement, si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$, alors $IM = \frac{AB}{2}$, et les calculs précédents démontrent que :

$IM = \frac{AB}{2} \iff \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Propriété 8.16

Tous les points du cercle de diamètre $[AB]$ distincts de A et de B sont tels que AMB est un triangle rectangle en M (figure 8.10).

Démonstration

D'après la propriété 8.15, tous les points M du cercle de diamètre $[AB]$ distincts de A et de B sont tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Or, pour un point M distinct de A et de B, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si AMB est un triangle rectangle en M.