Chapitre 15

Systèmes de deux équations à deux inconnues

I Exercices

15.1 Résolution de systèmes

Exercice 15.1

Résoudre les systèmes d'équations ci-dessous.

1. $\begin{cases} x - 5y = 17 \\ -3x + y = -23 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 5x + y = -27 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 5x + 7y = 17 \end{cases}$

Exercice 15.2

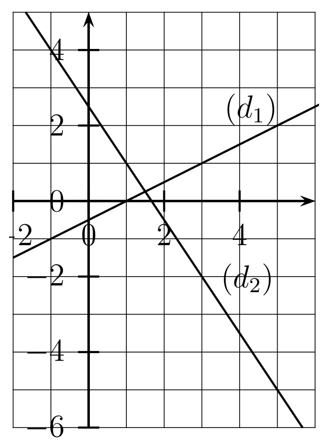
Résoudre les systèmes d'équations ci-dessous.

1. $\begin{cases} 6x - y = 22 \\ x + 7y = -25 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x + 2y = 38 \\ 4x - 5y = -3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + 9y = -4 \\ 7x + y = 34 \end{cases}$

15.2 Intersection de droites

Exercice 15.3

Les équations cartésiennes de deux droites (d_1) et (d_2) sont données ci-dessous.
$(d_1):\ x - 2y - 1 = 0$ $(d_2):\ 3x + 2y - 5 = 0$.
Ces deux droites sont tracées sur la figure ci-contre. On appelle L leur point d'intersection.



1. Placer le point L et lire ses coordonnées avec la précision permise par le graphique.

2. Écrire les équations de (d_1) et(d_2) sous la forme $ax + by = c$, puis résoudre le système formé par ces deux équations.

3. Donner les coordonnées exactes du point L.

Exercice 15.4

Les équations cartésiennes de deux droites (d_1) et (d_2) sont données ci-dessous.

(d_1) : $3x + y - 6 = 0$ $\qquad$ (d_2) : $x + 2y - 4 = 0$

1. Tracer un repère et tracer ces deux droites. Effectuer les calculs nécessaires.

2. Les droites (d_1) et (d_2) se coupent au point M. Placer le point M et lire ses coordonnées avec la précision permise par le graphique.

3. Écrire les équations des droites (d_1) et (d_2) sous la forme $ax + by = c$, puis résoudre le système formé par ces deux équations.

4. Donner les coordonnées exactes du point M.

Exercice 15.5

Les équations cartésiennes de deux droites (d_1) et (d_2) sont données ci-dessous.

(d_1) : $5x - y - 5 = 0$ $\qquad$ (d_2) : $x + 3y - 6 = 0$

1. Tracer un repère et tracer ces deux droites. Effectuer les calculs nécessaires.

2. Les droites (d_1) et (d_2) se coupent au point N. Placer le point N et lire ses coordonnées avec la précision permise par le graphique.

3. Écrire les équations des droites (d_1) et (d_2) sous la forme $ax + by = c$, puis résoudre le système formé par ces deux équations.

4. Donner les coordonnées exactes du point N.

II Cours

15.0 Programme

Capacité attendue : résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

15.1 Méthodes de résolution de systèmes du 1er degré à 2 inconnues

Exemple 15.1

Résolution du système $\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

Résolution d'un système par combinaison linéaire

On effectue d'abord des calculs pour éliminer une des deux inconnues, afin de calculer l'autre inconnue.

Ci-dessous, on va éliminer y et calculer x.

$$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \\ \times 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} & \begin{cases} x - 3y = 11 \\ 6x + 3y = 24 \end{cases} & \\ \hline & 7x & = 35 \\ \iff & x & = \dfrac{35}{7} \\ \iff & x & = 5 \end{array}$$

On remplace maintenant x dans une des deux équations et on calcule y.

$$\begin{array}{rrl} & x - 3y = & 11 \\ \iff & 5 - 3y = & 11 \\ \iff & -3y = & 11 - 5 \\ \iff & -3y = & 6 \\ \iff & y = & \dfrac{6}{-3} \\ \iff & y = & -2 \end{array}$$

Le couple solution est donc : $\boxed{(5\ ;\ -2)}$

Résolution d'un système par substitution

$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

On écrit une inconnue en fonction de l'autre.

Ici, on va écrire x en fonction de y.

$$\begin{array}{rll} & x - 3y & = 11 \\ \iff & x & = 11 + 3y \end{array}$$

On remplace maintenant x par $11 + 3y$ dans la deuxième équation.

$$\begin{array}{rll} & 2x + y & = 8 \\ \iff & 2 \times (11 + 3y) + y & = 8 \\ \iff & 22 + 6y + y & = 8 \\ \iff & 7y & = 8 - 22 \\ \iff & 7y & = -14 \\ \iff & y & = \dfrac{-14}{7} \\ \iff & y & = -2 \end{array}$$

Or, on sait que $x = 11 + 3y$, donc

$x = 11 + 3 \times (-2) = 11 - 6 = 5$

Le couple solution est donc : $\boxed{(5\ ;\ -2)}$

Remarque 15.1 (Quelle méthode utiliser ?)

Dans certains cas, la méthode par substitution fait faire des calculs avec des écritures fractionnaires, ce qui complique les calculs.

Par exemple, dans le système précédent on a écrit x en fonction de y ainsi : $x = 11 + 3y$, et comme il n'y a pas de barre de fraction, les calculs ne sont pas compliqués.

En revanche, dans l'exemple suivant la méthode par combinaison linéaire est préférable.

Exemple 15.2

Résolution du système $\begin{cases} 3x + 11y = 23 \\ 7x - 6y = 22 \end{cases}$

Résolution du système par combinaison linéaire

Élimination de x et calcul de y.

$$\left\{\begin{array}{ll|l} 3x + 11y & = 23 & \times 7 \\ 7x - 6y & = 22 & \times 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrcl} & \begin{cases} 21x + 77y = 161 \\ 21x - 18y = 66 \end{cases} & & \\ \hline & 95y & = & 95 \\ \iff & y & = & \dfrac{95}{95} \\ \iff & y & = & 1 \end{array}$$

On remplace y par 1 dans la première équation et on calcule x.

$$\begin{array}{rrcl} & 3x + 11y & = & 23 \\ & 3x + 11 \times 1 & = & 23 \\ \iff & 3x & = & 23 - 11 \\ \iff & 3x & = & 12 \\ \iff & x & = & \dfrac{12}{3} \\ \iff & x & = & 4 \end{array}$$

Le couple solution est donc : $\boxed{(4\ ;\ 1)}$

Résolution du système par substitution

$\begin{cases} 3x + 11y = 13 \\ 7x - 6y = 22 \end{cases}$

On écrit x en fonction de y.

$3x + 11y = 23 \iff x = \dfrac{-11y + 23}{3}$

On remplace x par $\dfrac{-11y + 23}{3}$ dans la deuxième équation.

$$\begin{array}{rll} & 7x - 6y & = 22 \\ \iff & 7 \times \dfrac{-11y + 23}{3} - 6y & = 22 \\ \iff & 7 \times \dfrac{-11y + 23}{3} - \dfrac{6y \times 3}{3} & = 22 \\ \iff & \dfrac{-77y + 161}{3} - \dfrac{18y}{3} & = 22 \\ \iff & \dfrac{-77y + 161 - 18y}{3} & = 22 \\ \iff & \dfrac{-95y + 161}{3} & = 22 \\ \iff & -95y + 161 & = 22 \times 3 \\ \iff & -95y + 161 & = 66 \\ \iff & -95y & = 66 - 161 \\ \iff & -95y & = -95 \\ \iff & y & = \dfrac{-95}{-95} \\ \iff & y & = 1 \end{array}$$

Or, on sait que $x = \dfrac{-11y + 23}{3}$,

donc $x = \dfrac{-11 \times 1 + 23}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$

Le couple solution est donc : $\boxed{(4\ ;\ 1)}$

15.2 Intersection de droites

Remarque 15.2

Une équation linéaire à deux inconnues est une équation de la forme $ax + by = c$, ce qui équivaut à $ax + by - c = 0$, autrement dit une équation linéaire à deux inconnues équivaut à une équation cartésienne de droite.

Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues revient donc à déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites. Voir l'exemple suivant.

Exemple 15.3

Les équations cartésiennes de deux droites (d_1) et (d_2) sont données ci-dessous.

(d_1) : $3x + 11y - 23 = 0$
(d_2) : $7x - 6y - 22 = 0$

Ces deux droites sont tracées sur la figure ci-dessous. On appelle K leur point d'intersection.

Or, on a les équivalences suivantes :

$3x + 11y - 23 = 0 \iff 3x + 11y = 23$
$7x - 6y - 22 = 0 \iff 7x - 6y = 22.$

Dans l'exemple 15.2, on a résolu le système formé par ces deux équations $\begin{cases} 3x + 11y = 23 \\ 7x - \ \ 6y = 22 \end{cases}$,
et le couple solution $(4\,;\,1)$ que l'on avait obtenu est le couple des coordonnées du point K, point d'intersection des deux droites.