Chapitre 10

Vecteurs et coordonnées

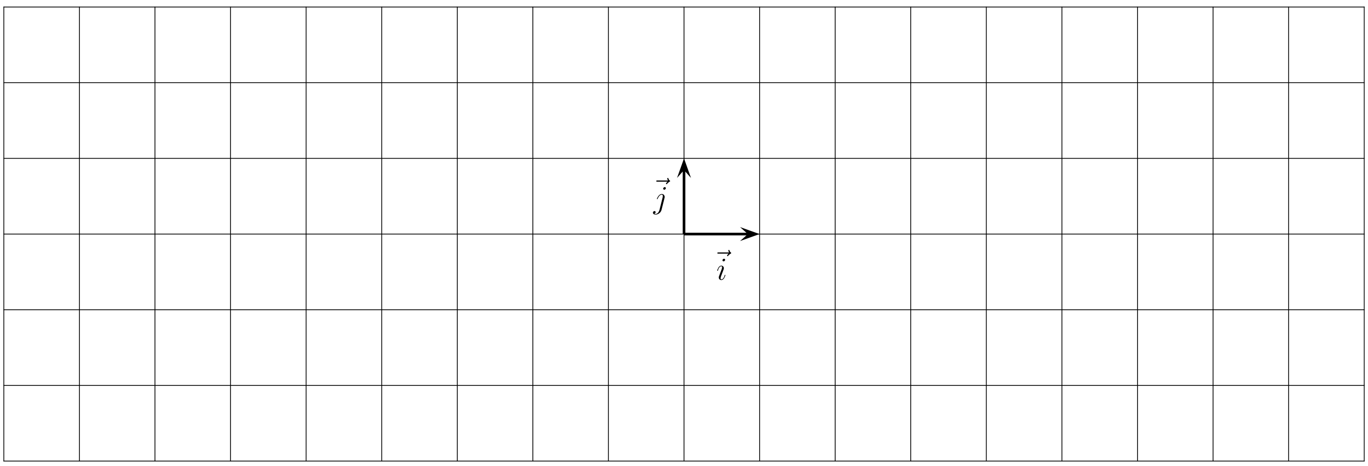
I Exercices

10.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Avant de traiter ce premier exercice, lire le cours page 122 jusqu'à l'exemple 10.2.

Exercice 10.1

1. Tracer ci-dessous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, tels que :
   $\vec{u} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ $\quad$ $\vec{v} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$ $\quad$ $\vec{w} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$ $\quad$ $\vec{z} = -3\vec{i} - 1\vec{j}$
2. Donner les coordonnées de ces vecteurs dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

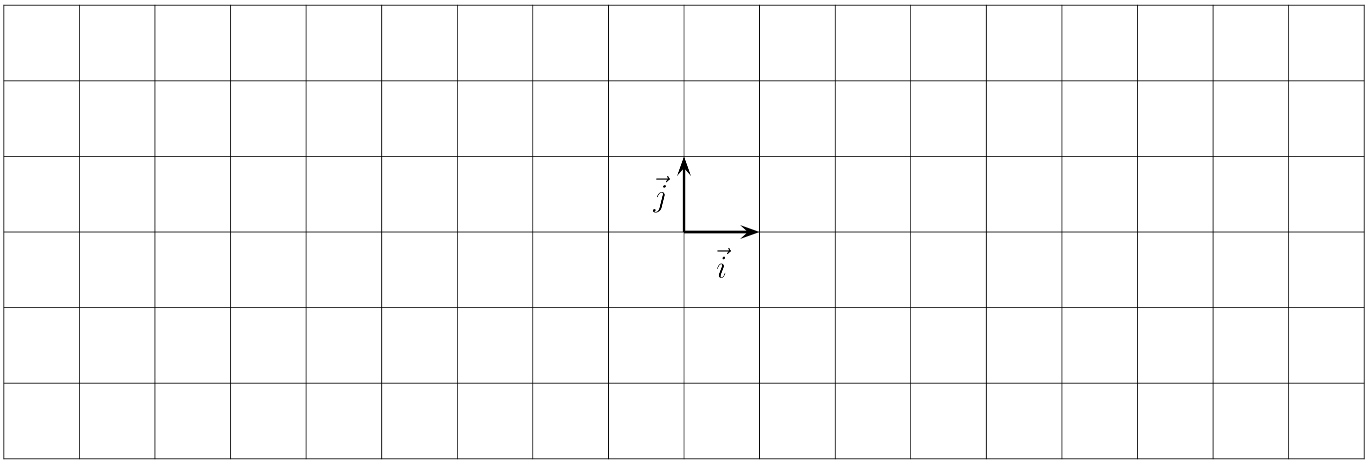


Exercice 10.2

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ sont :
$\vec{u}\,(-8\ ;\ 2)$, $\vec{v}\,(7\ ;\ -1)$, $\vec{w}\,(9\ ;\ 2)$, $\vec{z}\,(-6\ ;\ -3)$,

1. Tracer ces vecteurs ci-dessous.

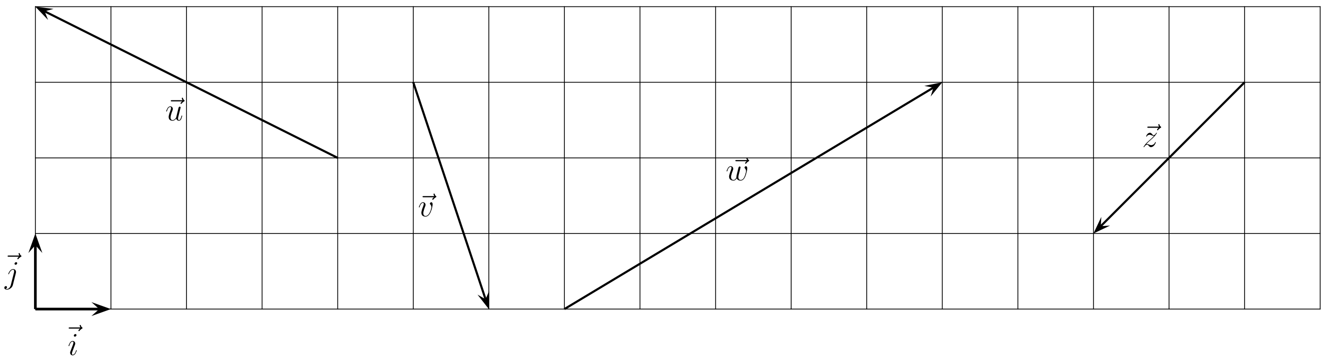
2. Écrire chaque vecteur sous la forme $x\vec{i} + y\vec{j}$



Exercice 10.3 (Lire les coordonnées d'un vecteur)

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ tracés sur la figure ci-dessous, dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

2. Écrire chaque vecteur sous la forme $x\vec{i} + y\vec{j}$



10.2 Coordonnées de la somme de vecteurs

Avant de traiter l'exercice suivant, lire dans le cours le paragraphe 10.2 page 122.

Exercice 10.4

1. a) Tracer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}\,(-1\ ;\ 5)$ et $\vec{v}\,(-6\ ;\ -3)$.

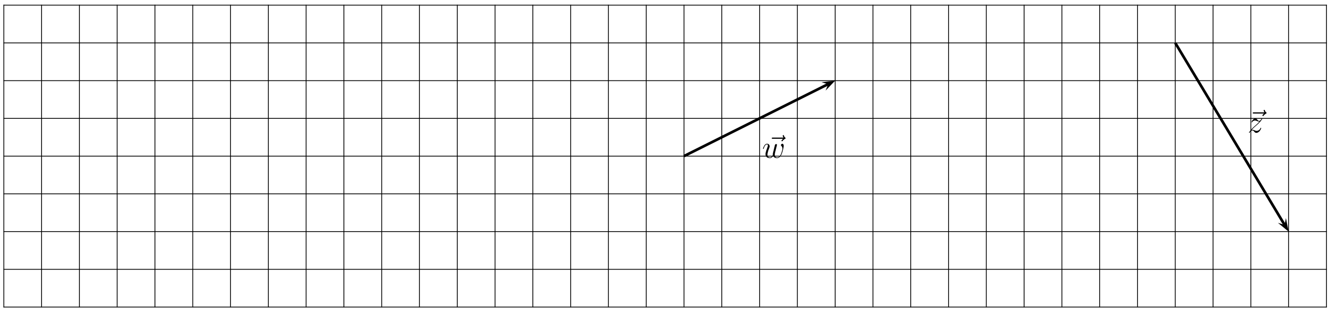
b) Tracer le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

c) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

2. a) Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$.

b) Tracer le vecteur $\vec{w}+\vec{z}$.

c) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w}+\vec{z}$.



10.3 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel, colinéarité

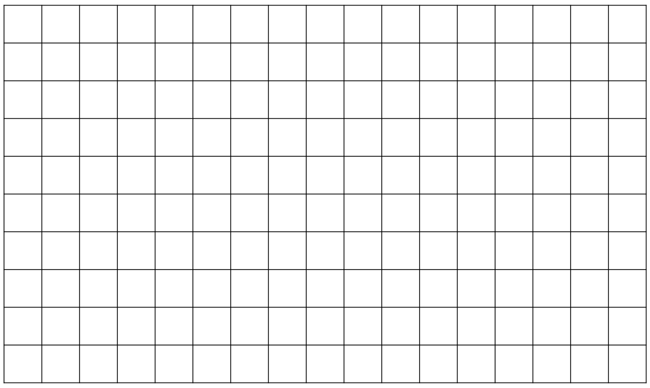
Avant de traiter l'exercice suivant, lire dans le cours la propriété 10.2 et l'exemple 10.4 page 123.

Exercice 10.5 (Produit d'un vecteur par un réel)

1. Tracer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, de coordonnées $\vec{u}\,(2\ ;\ -1)$, $\vec{v}\,(1\ ;\ 2)$.

2. Tracer les vecteurs $3\vec{u}$ et $-4\vec{v}$.

3. Calculer les coordonnées des vecteurs $3\vec{u}$ et $-4\vec{v}$.



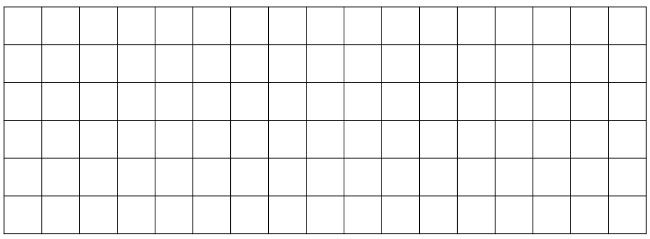
Avant de traiter l'exercice suivant, lire dans le cours la définition 10.5 page 123 et l'exemple 10.5 page 124.

Exercice 10.6 (Colinéarité)

1. Tracer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de coordonnées $\vec{u}\,(4\ ;\ -2)$, $\vec{v}\,(-6\ ;\ 3)$, $\vec{w}\,(5\ ;\ -3)$.

2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

3. Même consigne pour les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

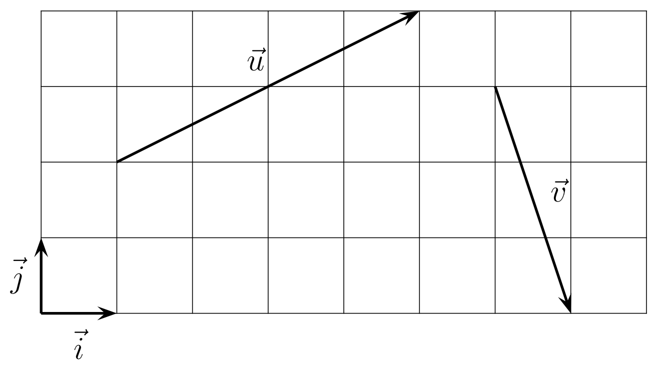


10.4 Calculer la norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur est donnée par la définition 10.2 page 122, et son calcul est indiqué par la propriété 10.4 page 124.

Exercice 10.7

1. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. Calculer leurs normes $||\vec{u}||$ et $||\vec{v}||$. Donner chaque fois la valeur exacte et l'arrondi au dixième près.

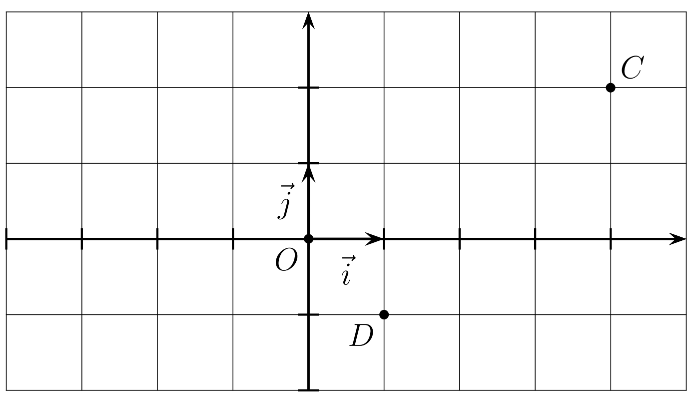


10.5 Coordonnées de points et de vecteurs

Exercice 10.8

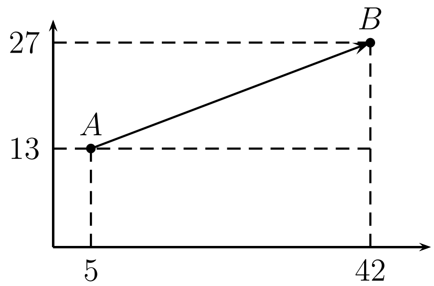
Le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre, est orthonormé.

1. Dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, placer les points : $A(-3\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ -1)$.
2. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et lire ses coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
3. Lire les coordonnées des points C et D.
4. Tracer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ et lire ses coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.



Exercice 10.9

Les coordonnées des points A et B sont $A(5\ ;\ 13)$ et $B(42\ ;\ 27)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exercice 10.10

1. Tracer un repère, placer les points $A\ (-3\ ;\ 2)$, $B\ (7\ ;\ 0)$, $C\ (5\ ;\ -4)$, $D\ (-5\ ;\ -2)$, puis tracer le quadrilatère $ABCD$.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
3. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifier.

Exercice 10.11

1. Tracer un repère, placer les points $A\ (-4\ ;\ -3)$, $B\ (3\ ;\ -2)$, $C\ (4\ ;\ 4)$, $D\ (-2\ ;\ 3)$, puis tracer le quadrilatère $ABCD$.
2. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifier par des calculs de coordonnées de vecteurs.

Exercice 10.12

Dans un repère, les coordonnées des points A, B, C, D sont :
A $(-2\,;\,2)$, B $(3\,;\,1)$, C $(-2\,;\,-3)$, D $(-6\,;\,-2)$.

1. Tracer la figure.

2. Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ? Justifier.

Exercice 10.13

Dans un repère les coordonnées des points E, F, G, H sont :
E $(-4\,;\,-2)$, F $(1\,;\,8)$, G $(7\,;\,6)$, H $(2\,;\,-4)$.

1. Tracer la figure.

2. Le quadrilatère EFGH est-il un parallélogramme ? Justifier.

Exercice 10.14

1. Tracer un repère, et placer les points $A\ (6\ ;\ 2)$, $B\ (8\ ;\ -4)$, $C\ (-4\ ;\ 3)$.

2. Placer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Tracer ce parallélogramme.

3. Déterminer les coordonnées du point D.

Exercice 10.15

Saisir une script en Python, nommé `coordvec`, dans lequel on définit une fonction `cv` qui retourne la liste des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées des points A et B.

Une liste en Python est entre crochets.

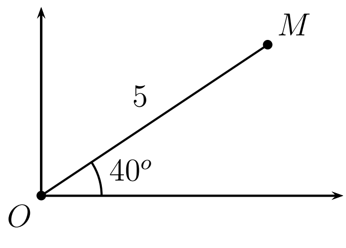
Exercice 10.16

Compléter le script en Python de l'exercice 10.15, en définissant une fonction `prl` qui utilise la fonction `cv` et qui retourne `True` si $ABCD$ est un parallélogramme et `False` sinon.

- Attention à l'ordre des coordonnées.
- On peut comparer deux listes.

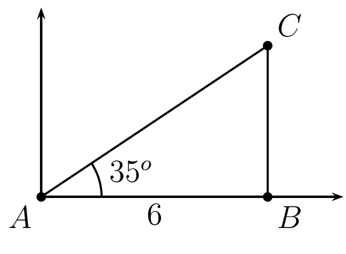
Exercice 10.17

Dans ce repère orthonormé d'origine O, calculer les coordonnées du point M d'après les mesures indiquées, et tracer des traits sur la figure.
On précise que la figure n'est pas en vraie grandeur.



Exercice 10.18

Dans ce repère orthonormé les coordonnées des points A et B sont $A\,(0\ ;\ 0)$ et $B\,(6\ ;\ 0)$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 35^o.
On précise que la figure n'est pas en vraie grandeur.



1. Placer le point H projeté orthogonal du point B sur la droite (AC), puis le point D projeté orthogonal du point H sur la droite (AB), en laissant les traits de construction.
Le but des questions page suivante est d'obtenir les coordonnées du point H dans ce repère.

2. En justifiant, calculer au dixième près les distances BC, AC, AH.

3. En utilisant la propriété de Thalès, écrire deux quotients égaux à $\dfrac{AH}{AC}$.

4. En déduire les calculs des distances AD et AH au dixième près.

5. Donner au dixième près les coordonnées du point H dans ce repère.

10.6 Alignement et parallélisme

Exercice 10.19

1. Tracer un repère et placer les points $A(1\ ;\ 2)$, $B(5\ ;\ 1)$, $C(6\ ;\ -3)$, $D(-2\ ;\ -1)$.
2. Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ et calculer leurs coordonnées.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont-ils colinéaires ? Justifier par un calcul.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Exercice 10.20

1. Tracer un repère et placer les points $A(-3\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(5\ ;\ -4)$, $D(-5\ ;\ -1)$.
2. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un trapèze ? Justifier.

Exercice 10.21

1. Tracer un repère et placer les points $A(1\ ;\ 2)$, $B(4\ ;\ 4)$, $C(10\ ;\ 8)$, $D(-5\ ;\ -1)$.
2. Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et calculer leurs coordonnées.
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.
4. Les points A, B, D sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.

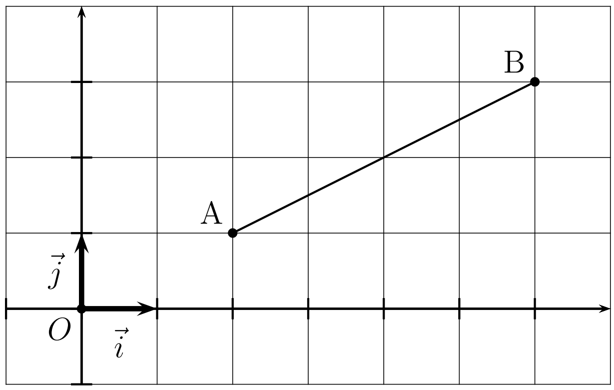
10.7 Distance

Exercice 10.22

Dans le repère orthonormé ci-contre les coordonnées des points A et B sont $A\,(2\ ;\ 1)$, $B\,(6\ ;\ 3)$.

Calculer la distance AB. On donnera la valeur approchée et l'arrondi au dixième près.

Indications :
- on peut d'abord calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis calculer sa norme $||\overrightarrow{AB}||$;
- ou bien on peut placer le point $C\,(6\ ;\ 1)$ et utiliser le triangle ABC.



Exercice 10.23

Le script Python ci-contre est nommé `distance`.

```
from math import *
def dis(xA,yA,xB,yB):
  return(...)
```

1. Compléter ce script pour que la fonction `dis` renvoie la distance entre deux points A et B.
   - La racine carrée en Pyhon est `sqrt` (square root)
   - L'inconvénient de cette fonction `dis` est qu'elle ne retournera pas la valeur exacte de la distance AB.
2. Vérifier avec les données et le résultat de l'exercice 10.22.

Dans les exercices qui suivent, les repères sont orthonormés. Si on trace la figure en prenant comme unité 1 cm, on peut vérifier en mesurant.

Exercice 10.24

Dans un repère orthonormé, les coordonnées des points A et B sont : A $(4\,;\,-1)$, B $(7\,;\,3)$.

Tracer la figure, et calculer la distance AB.

Exercice 10.25

Mêmes consignes que dans l'exercice 10.24 pour les points C et D, et la distance CD.

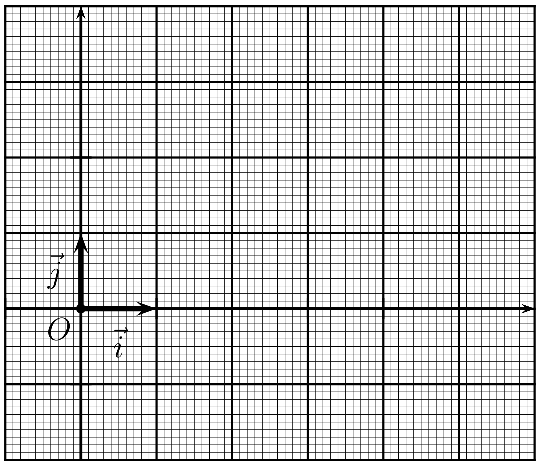
C $(-4\,;\,3)$, D $(8\,;\,-2)$.

Exercice 10.26

Mêmes consignes que dans l'exercice 10.24 pour les points E et F, et la distance EF. On donnera la valeur exacte de EF et son arrondi au dixième près. E $(5\,;\,-3)$, F $(2\,;\,4)$.

Exercice 10.27

1. Tracer un repère orthonormé, placer le point $A\,(3\ ;\ 1)$, puis tracer le cercle (C) de rayon 2.
2. Placer les points $B\,(1\ ;\ 2)$ et $D\,(4{,}2\ ;\ 2{,}6)$.
3. Le point B appartient-il au cercle (C) ? Justifier.
4. Le point D appartient-il au cercle (C) ? Justifier.



Exercice 10.28

On connaît les coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point et on voudrait un programme qui vérifie si ce point appartient au cercle (C) de l'exercice 10.27.

1. Dans un script Python, nommé `cercle`, saisir une fonction `ce` qui renvoie `True` si le point appartient au cercle (C) et `False` sinon.
   Dans cette fonction on utilisera la fonction `dis` de l'exercice 10.23.
2. Vérifier avec les données et les résultats de l'exercice 10.27.

Exercice 10.29

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, les coordonnées des points G, H, K sont :
G $(3\,;\,-2)$, H $(4\,;\,1)$, K $(-4\,;\,2)$.

1. Tracer la figure.
2. Calculer le périmètre, c'est à dire la longueur du tour du triangle GHK. Donner la valeur exacte et l'arrondi au dixième près.
3. Ce triangle est-il isocèle (deux côtés égaux) ? Justifier.

Exercice 10.30

Le triangle GHK de l'exercice 10.28 est-il rectangle ? Détailler les calculs et justifier.

Exercice 10.31

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, les coordonnées des points M, N, P sont :
M $(-2\,;\,4)$, N $(2\,;\,-3)$, P $(-4\,;\,1)$.

1. Tracer la figure.
2. Le triangle MNP est-il rectangle ? Détailler les calculs et justifier.

Exercice 10.32

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, les coordonnées des points R, S, T sont :
R $(-2\,;\,2)$, S $(3\,;\,3)$, T $(4\,;\,-2)$.

1. Tracer la figure.
2. Le triangle RST est-il rectangle ? Détailler les calculs et justifier.

Exercice 10.33

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, les coordonnées des points A, B, C sont :
$A\ (-6\ ;\ 1)$, $B\ (2\ ;\ 5)$, $C\ (4\ ;\ -9)$.

1. Tracer le repère, et placer les points A, B, C.
2. Calculer les distances AC et BC et les écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a, b sont des entiers, b entier positif le plus petit possible.

   Répondre aux deux questions suivantes sans utiliser de calcul de distance avec les coordonnées.
3. Le point K est le milieu du segment $[AB]$ Que peut-on dire des droites (AB) et (CK) ? Le démontrer.
4. Le point L est le milieu du segment $[AC]$. Déterminer la distance KL.

Exercice 10.34

Dans un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 1 cm, les coordonnées du point sont : $A\ (5\ ;\ -1)$. (C) est le cercle de centre A et de rayon 4.

1. Tracer la figure.
2. Déterminer les points d'ordonnée 2 qui sont sur le cercle (C) (il faut déterminer les valeurs exactes des abscisses possibles).

Exercice 10.35

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 14$ cm et $AD = 8$ cm. Les diagonales de ce rectangle se coupent en E. Les points F et G sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CE]$.

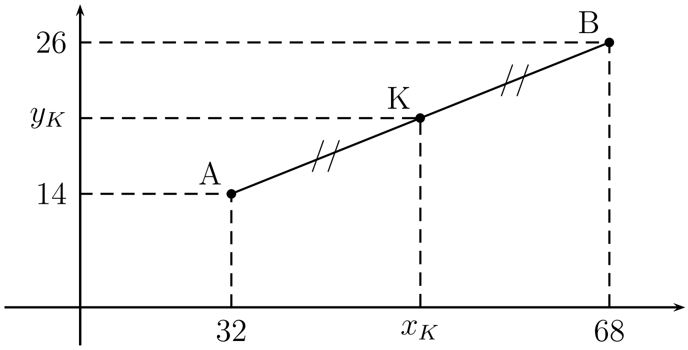
1. Tracer la figure.
2. Tracer le triangle DFG. Ce triangle est-il isocèle ? Justifier.
   Indications :
   - on pourra prendre un repère orthonormé ;
   - dans ce repère, donner les coordonnées des points A, B, C, D sans justifier ;
   - détailler ensuite les calculs pour justifier si le triangle DFG est isocèle ou non.

10.8 Coordonnées du milieu d'un segment

Exercice 10.36

Dans un repère, les coordonnées des points A et B sont A (32 ; 14), B (68 ; 26). Le point K est le milieu du segment [AB]. La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur

Calculer les coordonnées du point K.



Exercice 10.37

Dans un repère (O, I, J) les coordonnées des points A et B sont : $A\ (7\ ;\ 1)$, $B\ (-1\ ;\ 3)$.

1. Tracer la figure.

2. Calculer les coordonnées du point K milieu du segment $[AB]$.

3. Vérifier sur la figure.

Exercice 10.38

Mêmes consignes que dans l'exercice 10.37 pour les points C et D, et le point L milieu de [CD].

C $(-3\,;\,1)$, D $(-5\,;\,-5)$.

Exercice 10.39

Mêmes consignes que dans l'exercice 10.37 pour les points E et F, et le point M milieu de [EF].

E $(2\,;\,-1)$, F $(-2\,;\,-4)$.

Exercice 10.40

Écrire un algorithme qui demande les coordonnées de deux points et qui affiche les coordonnées du milieu du segment qui joint ces deux points.

Exercice 10.41

1. Tracer un repère (O, I, J) et placer les points A,B, C, D de coordonnées A $(-1\,;\,4)$, B $(6\,;\,5)$, C $(3\,;\,0)$, D $(-5\,;\,-1)$.

2. Tracer le quadrilatère ABCD et ses diagonales.

3. Calculer les coordonnées du point K milieu du segment [AC] et du point L milieu du segment [BD].

4. Les segments [AC] et [BD] ont-ils le même milieu ? Justifier.

5. Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ? Justifier en citant une propriété.

Exercice 10.42

1. Tracer un repère (O, I, J) et placer les points E, F, G, H de coordonnées E $(3\,;\,4)$, F $(6\,;\,-3)$, G $(1\,;\,-2)$, H $(-2\,;\,5)$.

2. Tracer le quadrilatère EFGH et ses diagonales.

3. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment [EG] et du point N milieu du segment [FH].
4. Les segments [EG] et [FH] ont-ils le même milieu ? Justifier.
5. Le quadrilatère EFGH est-il un parallélogramme ? Justifier en citant une propriété.

Exercice 10.43

Écrire un algorithme qui demande les coordonnées de quatre points A, B, C, D et qui indique si ABCD est un parallélogramme ou non.

Exercice 10.44

1. Tracer un repère (O, I, J) et placer les points A et K de coordonnées A (1 ; 2), K (4 ; 4),
2. Calculer les coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point B tel que K soit le milieu du segment [AB].

Exercice 10.45

1. Dans un repère du plan, placer les points $C\ (-3\ ;\ 2)$ et $D\ (-4\ ;\ 4)$, puis placer E le symétrique de C par rapport à D.
2. Calculer les coordonnées du point E.

Exercice 10.46

1. Dans un repère du plan, placer les points $A\ (-3\ ;\ 1)$ $B\ (5\ ;\ 3)$ $C\ (1\ ;\ -5)$ puis placer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées du point D.

10.9 Problèmes de synthèse

Exercice 10.47

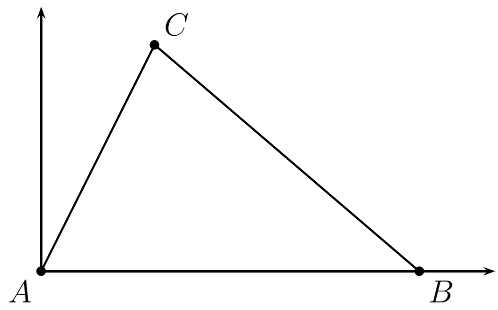
1. Tracer un repère orthonormé et placer les points A, B, C, D de coordonnées $A\,(-1\ ;\ 4)$, $B\,(4\ ;\ 5)$, $C\,(3\ ;\ 0$, $D\,(-2\ ;\ -1)$.
2. Tracer le quadrilatère $ABCD$.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
4. Calculer les distances AB et AD.
5. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier sans aucun calcul supplémentaire.

Exercice 10.48

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points A, B, C, D de coordonnées A $(-6\,;\,-1)$, B $(-2\,;\,7)$, C $(2\,;\,5)$, D $(-2\,;\,-3)$.
2. Tracer le quadrilatère ABCD.
3. Quelle est la nature exacte du quadrilatère ABCD ? Détailler les calculs et démontrer sa réponse.

Exercice 10.49

Dans ce repère orthonormé les coordonnées des points A et B sont $A\,(0\ ;\ 0)$ et $B\,(8\ ;\ 0)$, et on donne les mesures suivantes : $AC = 5$ et $BC = 7$.
On précise que la figure n'est pas en vraie grandeur.



1. Placer le point D projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), et tracer le segment $[CD]$.
2. On appelle x et y les coordonnées du point C dans ce repère. Le but des questions suivantes est de calculer les valeurs exactes de x et y.
   a) Dans le triangle rectangle ACD, écrire y^2 en fonction de x.
   b) Dans le triangle rectangle BCD, écrire y^2 en fonction de x.
   c) Déduire des deux égalités précédentes une équation d'inconnue x, puis résoudre cette équation.
   d) Calculer la valeur exacte de y, puis donner les coordonnées exactes de C.

II Cours

10.0 Programme

Contenus

- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.

Capacités attendues

- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Calculer la distance entre deux points.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

Démonstration

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

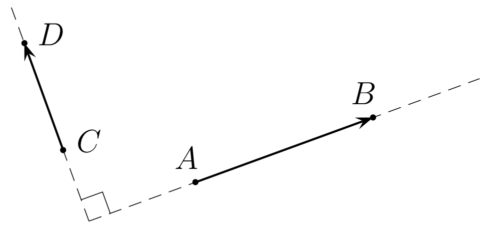
Exemple d'algorithme

Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

10.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Définition 10.1 (Vecteurs orthogonaux)

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux signifie que
les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.



Définition 10.2 (Norme d'un vecteur)

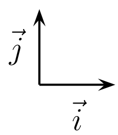
La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est sa longueur, et on la note : $||\vec{u}||$.
La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc la longueur AB ou la distance AB : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Définition 10.3 (Base orthonormée)

Une base orthonormée du plan est formée de deux vecteurs orthogonaux et de même norme.

Exemple 10.1

Les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de la figure ci-contre forment la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.



Définition 10.4

Dire que les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exemple 10.2

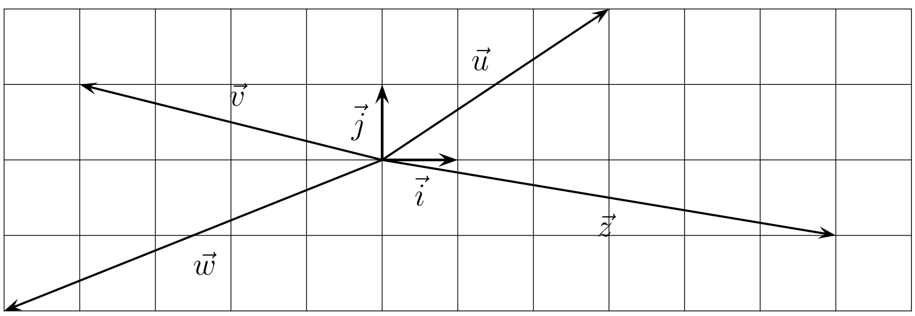
Ci-dessous, 4 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, et leurs coordonnées dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ $\quad \vec{u}\,(3\ ;\ 2)$

$\vec{v} = -4\vec{i} + 1\vec{j}$ $\quad \vec{v}\,(-4\ ;\ 1)$

$\vec{w} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$ $\quad \vec{w}\,(-5\ ;\ -2)$

$\vec{z} = 6\vec{i} - 1\vec{j}$ $\quad \vec{z}\,(6\ ;\ -1)$



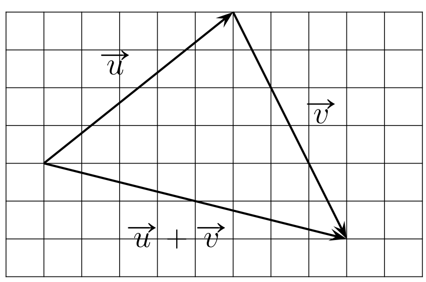
10.2 Coordonnées de la somme de vecteurs

Propriété 10.1 (Coordonnées de la somme de deux vecteurs)

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$
les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'\ ;\ y + y')$.

Exemple 10.3

Dans la figure ci-contre, les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :
$\vec{u}\ (5\ ;\ 4)$ et $\vec{v}\ (3\ ;\ -6)$
Calcul des coordonnée du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$:
$5 + 3 = 8 \qquad 4 + (-6) = -2$
Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont donc $\boxed{\vec{u} + \vec{v}\ (8\ ;\ -2)}$



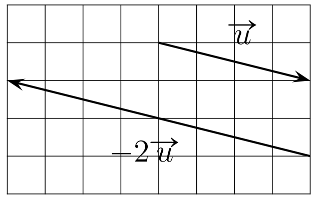
10.3 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel, colinéarité

Propriété 10.2

Pour un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $(kx\ ;\ ky)$.

Exemple 10.4

Dans la figure ci-contre, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\vec{u}\,(4\ ;\ -1)$
Calcul des coordonnée du vecteur $-2\vec{u}$:
$(-2) \times 4 = -8 \qquad (-2) \times (-1) = 2$
Les coordonnées du vecteur $-2\vec{u}$ sont donc $\boxed{-2\vec{u}\,(-8\ ;\ 2)}$



Définition 10.5 (Déterminant de deux vecteurs du plan)

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\,(x'\ ;\ y')$, le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre $xy' - x'y$.

$$\begin{array}{ll} \vec{u} & (x\ ;\ y) \\ \vec{v} & (x'\ ;\ y') \end{array}$$

Propriété 10.3 (Déterminant de 2 vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Démonstration

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\,(x'\ ;\ y')$, on sait qu'ils sont colinéaires si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

On a donc : $x' = kx$ et $y' = ky$.

Calculons maintenant le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$x \times y' - x' \times y = x \times ky - kx \times y = kxy - kxy = 0$

Ce déterminant est bien égal à zéro.

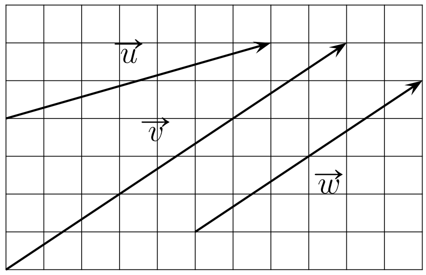
Remarque 10.1 (Déterminant nul et produits en croix)

Pour deux vecteurs $\vec{u}\,(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\,(x'\ ;\ y')$, qui sont colinéaires, le tableau ci-dessous formé par leur coordonnées est un tableau de proportionnalité, et on sait qu'alors les produits en croix sont égaux, autrement dit : $xy' = x'y$ par conséquent, on retrouve bien : $xy' - x'y = 0$

$$\begin{array}{ll} \vec{u} & (x\ ;\ y) \\ \vec{v} & (x'\ ;\ y') \end{array}$$

Exemple 10.5 (Justifier, avec des coordonnées, si des vecteurs sont colinéaires.)

Dans la figure ci-contre, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\ (7\ ;\ 2)$, $\vec{v}\ (9\ ;\ 6)$, $\vec{w}\ (6\ ;\ 4)$



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{array}{ll} \vec{u} & (7\ ;\ 2) \\ \vec{v} & (9\ ;\ 6) \end{array}$$

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs.

$7\times6-9\times2 = 42-18 = 24 \neq 0$ Le déterminant est non nul, donc $\boxed{\text{les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires}}$.

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{array}{ll} \vec{v} & (9\ ;\ 6) \\ \vec{w} & (6\ ;\ 4) \end{array}$$

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs.

$9 \times 4 - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0$ Le déterminant est nul, donc $\boxed{\text{les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}}$.

10.4 Calculer la norme d'un vecteur

Propriété 10.4

Pour un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, sa norme s'écrit $||\vec{u}||$, et on a : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$

10.5 Coordonnées de points et de vecteurs

Définition 10.6 (Repère orthonormé)

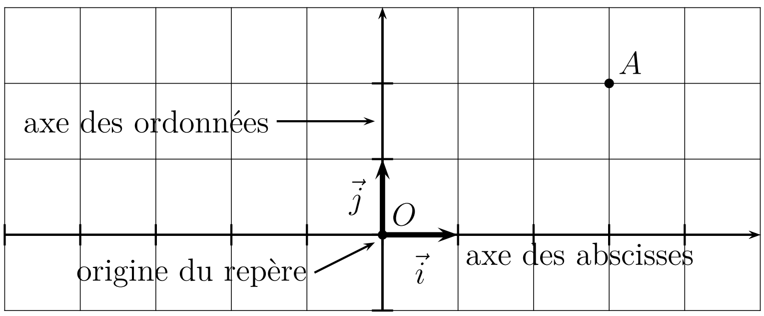
Pour un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, dire que $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé signifie que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.

Exemple 10.6 (Vocabulaire : coordonnées, abscisse, ordonnée, origine)

Les **coordonnées** du point A dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ sont 3 et 2, et on écrit :

$$\boxed{A(3\ ;\ 2)}.$$

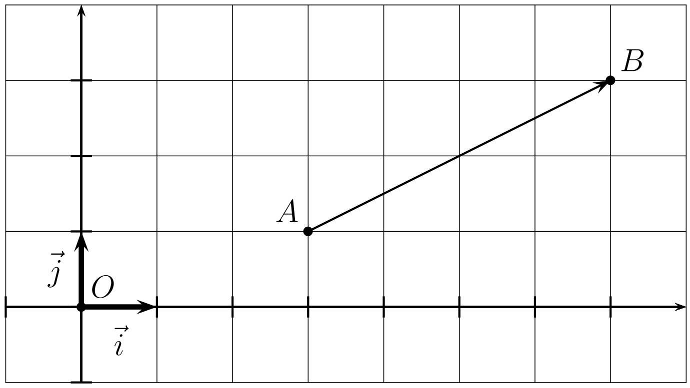
- L'**abscisse** de A est 3
- l'**ordonnée** de A est 2.



Exemple 10.7

Dans la figure ci-contre, le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

- Les coordonnées des points A et B dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ sont : $A(3\ ;\ 1)$ et $B(7\ ;\ 3)$.
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont : $\overrightarrow{AB}(4\ ;\ 2)$.

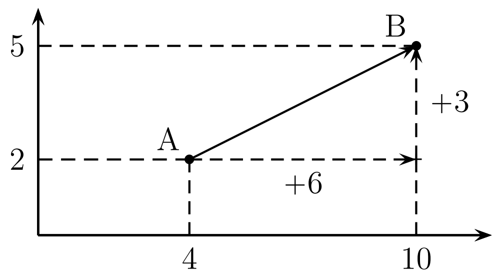


Propriété 10.5 (Coordonnées d'un vecteur dans un repère)

Pour deux points A et B de coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B)$ dans un repère du plan, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Exemple 10.8 (Calculer des coordonnées de vecteur)

Dans le repère ci-contre, les coordonnées de A et B sont $A\ (4\ ;\ 2)$ et $B\ (10\ ;\ 5)$.
Calcul des coordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$x_B - x_A = 10 - 4 = 6 \qquad y_B - y_A = 5 - 2 = 3$
Les coordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\ (6\ ;\ 3)}$



10.6 Alignement et parallélisme

Rappel du chapitre 4 (Vecteurs)

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode 10.1 (Parallélisme)

Pour savoir si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles,
- on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$;
- on calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$;
- si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont parallèles sinon, elles ne sont pas parallèles.

Méthode 10.2 (Alignement)

Pour savoir si trois points A, B, C sont alignés
- on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
- on calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
- si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, les points A, B, C sont alignés, sinon, ils ne sont pas alignés.

10.7 Distance

La distance entre deux points A et B est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $AB = ||\overrightarrow{AB}||$.

Or les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$.

On sait aussi que dans une base orthonormée, la norme d'un vecteur $\vec{u}(x\ ;\ y)$ est : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On obtient donc la propriété ci-dessous.

Propriété 10.6

Pour deux points de coordonnées $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ dans un repère orthonormé du plan, on a l'égalité : $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

Exemple 10.9

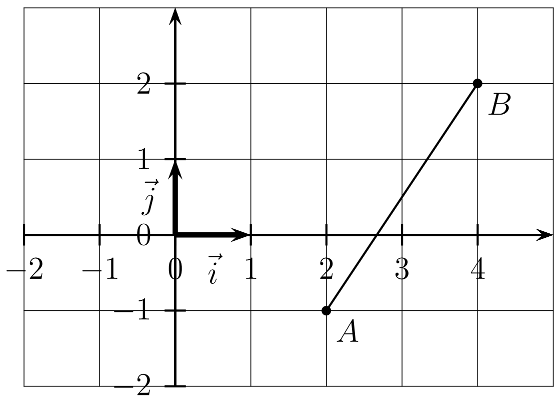
Les coordonnées des points A et B dans le repère orthonormé ci-dessous sont $A(2\ ;\ -1)$ et $B(4\ ;\ 2)$.

Calculons la distance AB.

$x_A = 2 \qquad y_A = -1 \qquad x_B = 4 \qquad y_B = 2$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(4-2)^2 + (2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (2+1)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

donc : $\boxed{AB = \sqrt{13}}$



10.8 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 10.7

Dans un repère du plan, pour deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\boxed{\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)}$.

Exemple 10.10

Les coordonnées des points A et B dans le repère orthonormé ci-dessous sont $A(2\ ;\ -1)$ et $B(4\ ;\ 2)$.

Calculons les coordonnées du point K milieu du segment $[AB]$.

$x_A = 2 \qquad y_A = -1 \qquad x_B = 4 \qquad y_B = 2$

$\dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \qquad \dfrac{(-1)+2}{2} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

Donc les coordonnées de K sont : $\boxed{K\,(3\ ;\ 0,5)}$.