Chapitre 8

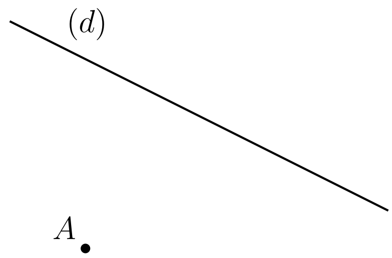
Géométrie plane

I Exercices

8.1 Projeté orthogonal

Exercice 8.1

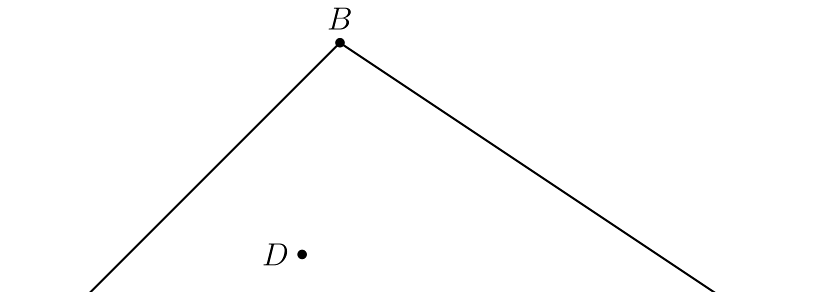
1. Sur la figure ci-contre, construire le point H de la droite (d) qui est le plus proche du point A.
2. Que peut-on dire des droites (d) et (AH) ?
3. Comment appelle-t-on le point H par rapport au point A et la droite (d) ? Dans le cours, voir la définition 8.5 et la propriété 8.14 page 97.



Exercice 8.2

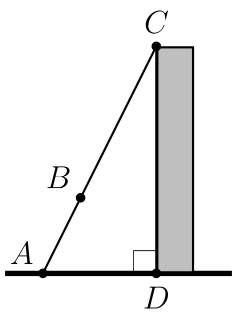
On effectuera les tracés sur la figure ci-contre.

1. Construire les points H, I, J projetés orthogonaux respectifs du point D sur les droites (AC), (AB), (BC).
2. Construire le point K projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).



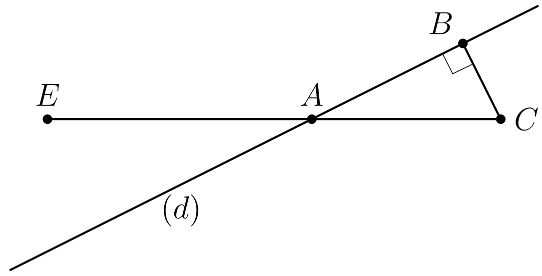
Exercice 8.3

Sur le schéma ci-contre, le segment $[AC]$ représente une échelle appuyée contre un mur représenté par la partie grisée. La droite (AD) représente le sol, et le point B représente un barreau de l'échelle.
On donne les mesures suivantes : $AC = 6$ m, $\quad AB = 2$ m, $\quad CD = 5,8$ m.
À quelle distance du sol se trouve le point B ?
Pour répondre, il faudra compléter le schéma ci-contre, nommer un point et détailler les calculs.



Exercice 8.4

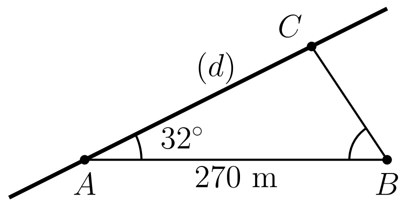
Sur la figure ci-contre, les points A et B sont sur la droite (d) et les points E, A, C sont alignés. Le point B est le projeté orthogonal du point C sur la droite (d).
On donne les mesures suivantes :
$AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $AE = 7$ cm.
La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.



1. Sur la figure ci-contre, construire le point F projeté orthogonal de E sur la droite (d).
2. Calculer les distances AF et EF en justifiant.

Exercice 8.5

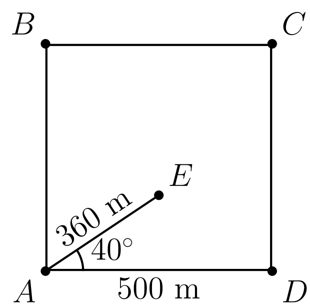
Sur le schéma ci-contre, la droite (d) représente une conduite d'eau. Le point B représente un bâtiment qu'il faut raccorder à cette conduite. Les points A et C sont sur la droite (d) et le segment $[BC]$ représente le raccord du bâtiment à la conduite.
On donne les mesures suivantes : $AB = 270$ m, $\widehat{BAC} = 32°$.



1. Calculer l'angle $\widehat{ABC}$ pour que le raccord $[BC]$ soit le plus court possible.
2. Calculer BC.

Exercice 8.6

$ABCD$ représente un bassin carré de 500 m de côté. Le point E représente un petit îlot où nichent des oiseaux. Le segment $[AE]$ représente une passerelle de 360 m de long et on sait que $\widehat{DAE} = 40°$.
Pour observer les oiseaux sans les déranger, on cherche le point sur le bord du bassin qui soit le plus proche possible de l'îlot. Déterminer ce point. On détaillera les tracés, les calculs et les explications.



8.2 Une égalité entre sinus et cosinus

Avant de faire cet exercice, lire la propriété 8.13 page 97.

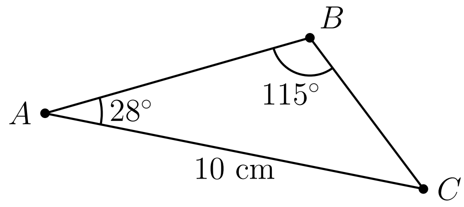
Exercice 8.7

1. L'angle α est tel que $\cos(\alpha) = 0,6$. Calculer $\sin(\alpha)$ sans calculer l'angle α.
2. Pour un angle β, est-il possible que : $\cos(\beta) = 0,3$ et $\sin(\beta) = 0,7$? Justifier sans calculer l'angle β.

8.3 Exercices divers

Exercice 8.8

Le triangle ABC est tracé schématiquement ci-contre.
Sur ce schéma, représenter le point H de la droite (BC) qui est le plus proche du point A.
Calculer la distance AH.
Indication : il faudra d'abord calculer des angles de la figure.

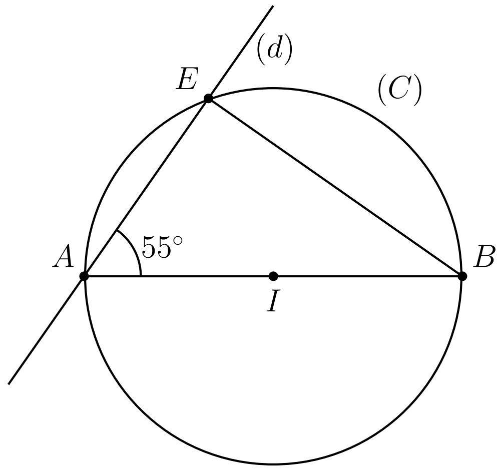


Exercice 8.9

Sur la figure ci-contre, le point I est le milieu du segment $[AB]$, le cercle (C) est le cercle de diamètre $[AB]$, qui est donc de centre I et qui passe par A et B. La droite (d) passe par le point A et recoupe le cercle (C) au point E.
On précise enfin que : $\widehat{BAE} = 55°$.

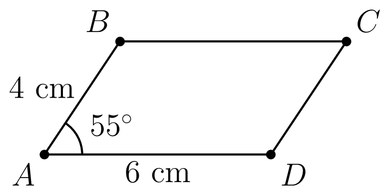
Le point D est-il le projeté orthogonal du point B sur la droite (d) ? Justifier.

Indication : calculer l'angle $\widehat{AEB}$. Pour cela, on pourra tracer le segment $[IE]$, puis calculer des angles de la figure.



Exercice 8.10

Le parallélogramme $ABCD$ est tel que $AD = 6$ cm, $AB = 4$ cm et $\widehat{BAD} = 55°$.
Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$.
Arrondir au dixième près.

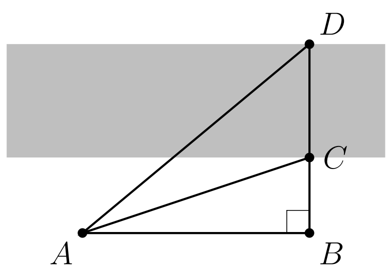


Exercice 8.11

Sur le schéma ci-contre la bande grisée représente une rivière dont on veut calculer la largeur CD.

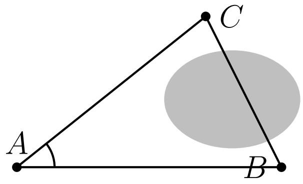
On donne les mesures suivantes :
$AB = 25$ m, $\widehat{BAC} = 12°$, $\widehat{BAD} = 37°$.

Calculer la largeur de cette rivière en mètres. Arrondir au centième près.



Exercice 8.12

Sur le schéma ci-contre la forme grisée représente une colline. À cause de cet obstacle, on ne peut pas mesurer directement la distance BC, mais on a relevé sur le terrain les mesures suivantes :
$AB = 800$ m, $AC = 635$ m, $\widehat{BAC} = 47°$.



Calculer la distance BC en mètres. Arrondir à l'unité près.

Indications :

- la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C coupe (AB) en H ;
- calculer alors les distances AH, CH, BH, en arrondissant chaque fois au centième près ;
- calculer BC en arrondissant à l'unité près.

Exercice 8.13

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré et les triangles CDL et BCI sont équilatéraux de sorte que les longueurs AB, BC, CD, AD, DL, CL, BI, CI, sont égales.

Le but de cet exercice est de déterminer si les points A, L, I sont alignés dans la figure 3.

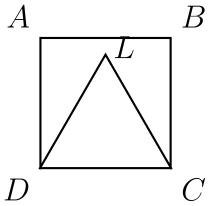


Fig. 1

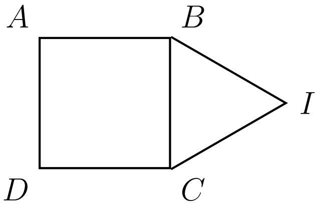


Fig. 2

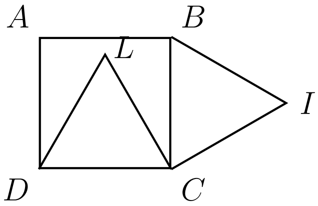


Fig. 3

1. Dans la figure 1, calculer les angles $\widehat{DAL}$ et $\widehat{BAL}$ en justifiant.
2. Dans la figure 2, calculer l'angle $\widehat{BAI}$ en justifiant.
3. Dans la figure 3, les points A, L, I sont-ils alignés ? Justifier.
4. Tracer la figure 3 en prenant AB = 5 cm. Utiliser le compas pour construire le triangle CDL.

II Cours

8.0 Programme

Contenus

- Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Capacités attendues

- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Traiter de problèmes d'optimisation.
- Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.

Démonstration

- Relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.
- Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.

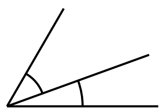
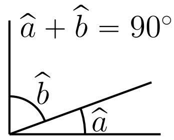
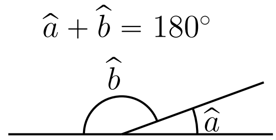
Approfondissements possibles

- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle $\dfrac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{C}\right)$.
- Formule d'Al-Kashi.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

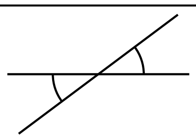
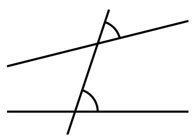
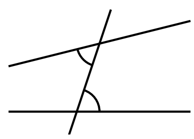
8.1 Rappels de géométrie de collège

8.1.a Angles

Définition 8.1 (Angles adjacents, complémentaires, supplémentaires)

		
angles adjacents	angles adjacents et complémentaires	angles adjacents et supplémentaires

Définition 8.2 (Angles opposés, correspondants et alternes-internes)

		
angles opposés	angles correspondants	angles alternes-internes

Propriété 8.1

Deux angles opposés sont égaux.

Propriété 8.2

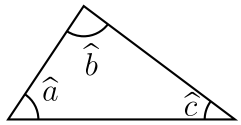
Deux droites sont coupées par une sécante.

- Ces deux droites sont parallèles si et seulement si les angles correspondants sont égaux.
- Ces deux droites sont parallèles si et seulement si les angles alternes-internes sont égaux.

Propriété 8.3

La somme des angles d'un triangle est 180°.

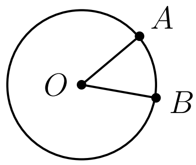
$$\widehat{a}+\widehat{b}+\widehat{c}=180^\circ$$



8.1.b Cercle

Propriété 8.4

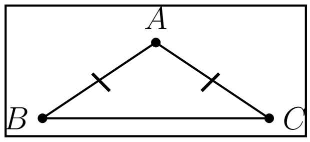
Pour trois points O, A, B du plan,
$OA = OB$ si et seulement si A et B sont sur un même cercle de centre O.



8.1.c Triangle isocèle

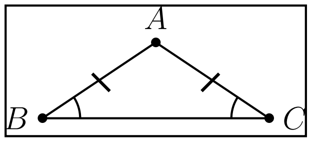
Définition 8.3

Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux.



Propriété 8.5

Un triangle est isocèle si et seulement si il a deux angles égaux.



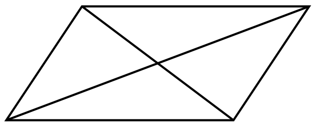
8.1.d Parallélogramme

Définition 8.4

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Propriété 8.6

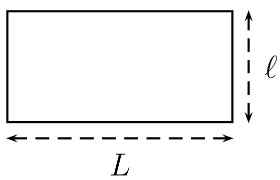
Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.



8.1.e Calculs d'aires

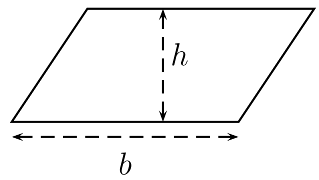
Propriété 8.7

L'aire d'un rectangle est égale à longueur × largeur : $\mathscr{A} = L \times \ell$



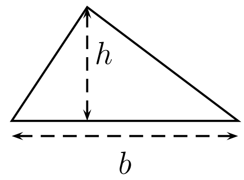
Propriété 8.8

L'aire d'un parallélogramme est égale à base × hauteur : $\mathscr{A} = b \times h$



Propriété 8.9

L'aire d'un triangle est égale à $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$: $\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2}$.

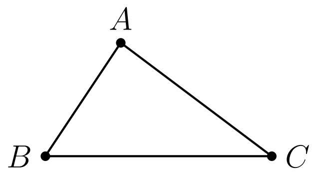


8.1.f Propriétés de Pythagore et de Thalès

Propriété 8.10 (Propriétés de Pythagore)

Un triangle est rectangle si et seulement si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
Autrement dit, pour un triangle ABC,

- si ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$;
- si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ABC est rectangle en A.

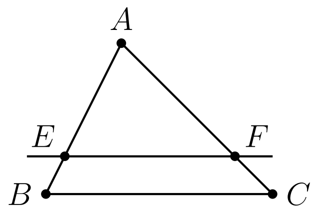


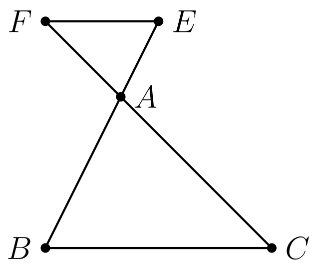
Propriété 8.11 (Propriétés de Thalès)

Pour un triangle ABC,

- si le point E appartient à la droite (AB),
- si le point F appartient à la droite (AC),
- si les droites (EF) et (AB) sont parallèles,

alors $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$.





8.1.g Trigonométrie

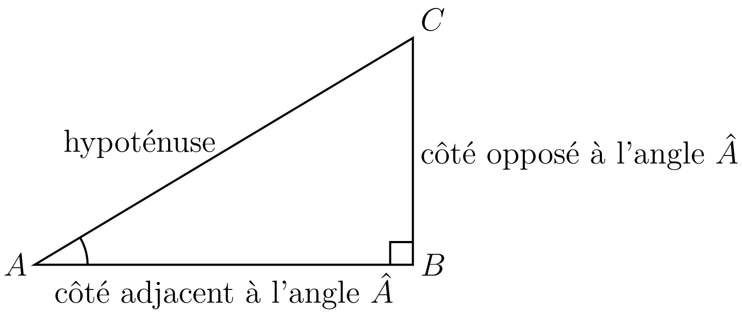
Propriété 8.12

Dans un triangle rectangle,

$$\text{cosinus d'un angle aigu} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\text{sinus d'un angle aigu} = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\text{tangente d'un angle aigu} = \frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$$



$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \qquad \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

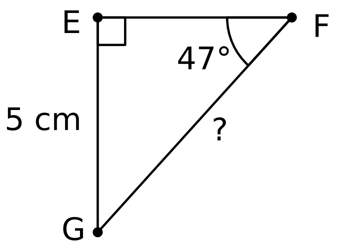
$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

Remarque 8.1

- le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1 ;
- la tangente d'un angle aigu est un nombre positif ;
- la tangente de 90° n'existe pas.

Exemple 8.1 (Calcul de longueur)

Calcul de la longueur FG dans le triangle rectangle EFG.



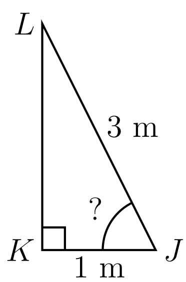
$$\frac{\sin 47°}{1} = \frac{5}{FG}$$

$$FG = \frac{1 \times 5}{\sin 47°}$$

$$FG \approx 6,836637305 \approx \boxed{6,8\text{cm}}$$

Exemple 8.2 (Calcul d'angle)

Calculer l'angle $\widehat{KJL}$ dans le triangle rectangle JKL. Arrondir le résultat à l'unité près.



$$\cos(\widehat{KJL}) = \frac{KJ}{LJ} = \frac{1}{3}$$

$$\widehat{KJL} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \left(\text{ou } \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\widehat{KJL} \approx 70,52877937 \approx \boxed{71°}$$

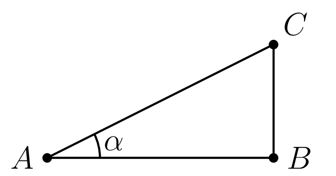
8.2 Une égalité entre sinus et cosinus

Propriété 8.13

Pour tout angle de mesure α, on a l'égalité : $\big(\cos(\alpha)\big)^2 + \big(\sin(\alpha)\big)^2 = 1$

Démonstration

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que $\widehat{BAC} = \alpha$.



On sait que $\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{AC}$ et que $\sin(\alpha) = \dfrac{BC}{AC}$.

On a alors :

$$\big(\cos(\alpha)\big)^2 + \big(\sin(\alpha)\big)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$$

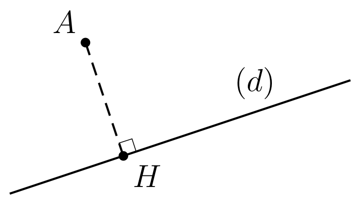
Or, le triangle ABC est rectangle en B, donc, d'après la propriété de Pythagore, $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Donc, $\big(\cos(\alpha)\big)^2 + \big(\sin(\alpha)\big)^2 = \dfrac{AC^2}{AC^2} = 1$

8.3 Projeté orthogonal

Définition 8.5

Pour un point A et une droite (d) du plan, le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H tel que la perpendiculaire à (d) passant par A coupe (d) en H.



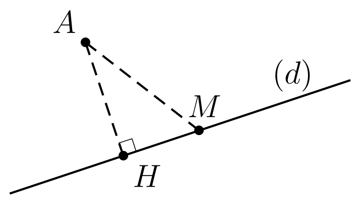
Propriété 8.14

Le projeté orthogonal du point A sur une droite (d) est le point de la droite (d) le plus proche du point A.

Démonstration

Considérons un point A, une droite (d), le point H projeté orthogonal du point A sur la droite (d), et un point M sur la droite (d) différent du point H.

Démontrons qu'alors $AM > AH$.



On sait que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (d), par conséquent, le triangle AHM est rectangle en H. Donc, d'après la propriété de Pythagore, $AM^2 = AH^2 + MH^2$.

Or, le point M est différent du point H, de sorte que $MH^2 > 0$, donc $AM^2 > AH^2$, or AM et AH sont positifs parce que ce sont des distances, donc $AM > AH$.

Nous avons ainsi démontré que tout point M de la droite (d) différent du point H est plus éloigné du point A que le point H.

Autrement dit, le point H est le point de la droite (d) le plus proche du point A.