Chapitre 4

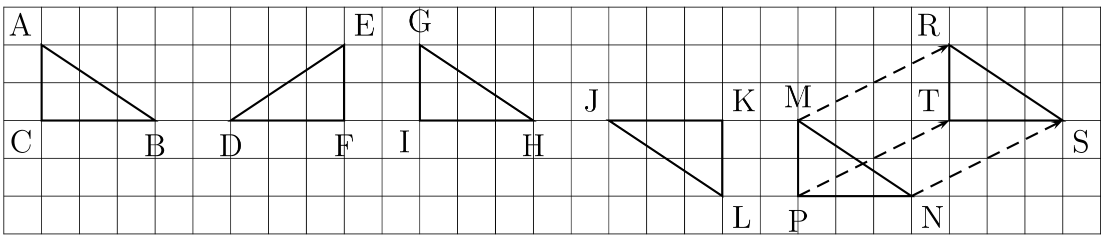
Vecteurs

I Exercices

4.1 Translation et vecteurs

Exercice 4.1

1. Le triangle DEF est l'image du triangle ABC par une transformation. Laquelle ?
2. Le triangle JKL est l'image du triangle GIH par une transformation. Laquelle ?
3. Le triangle RST est l'image du triangle MNP par une transformation. Laquelle ?



Exercice 4.2

1. Figure 1 : on translate le triangle ABC de façon à amener le point A sur le point D. Tracer DEF l'image du triangle ABC par cette translation.
2. Figure 2 : tracer le triangle DEF, image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$.

Figure 1

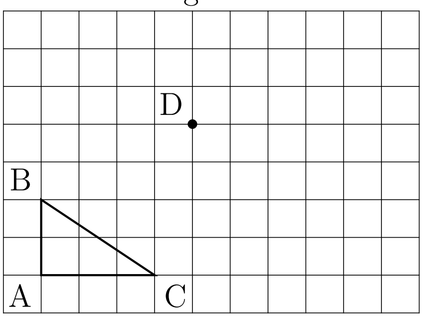
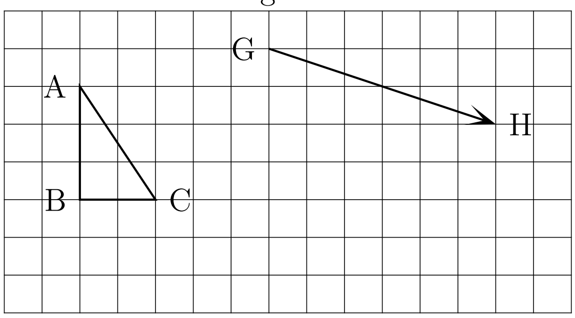
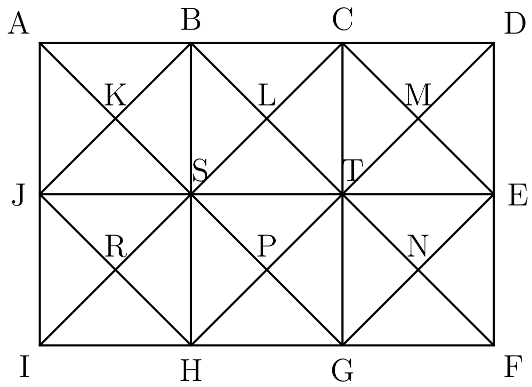


Figure 2



Exercice 4.3

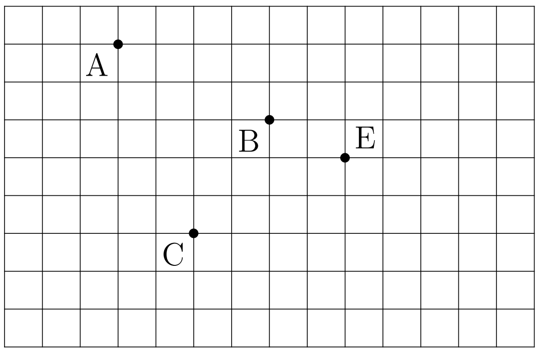
1. Quelle est l'image du triangle AJS par la translation qui transforme A en T ? ....
2. Quelle est l'image du triangle STG par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$? ....
3. Quelle est l'image du rectangle BDES par la translation qui transforme B en J ? ....
4. Quelle est l'image du triangle TNG par la translation de vecteur $\overrightarrow{SB}$ ....



4.2 Égalité de deux vecteurs

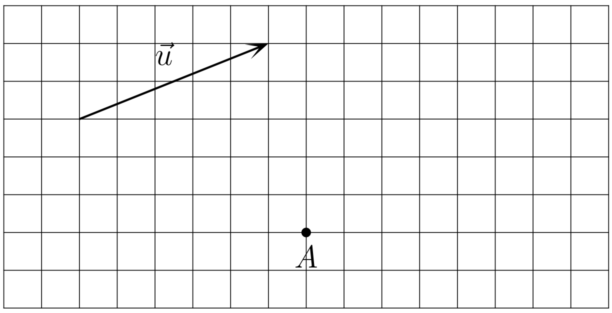
Exercice 4.4

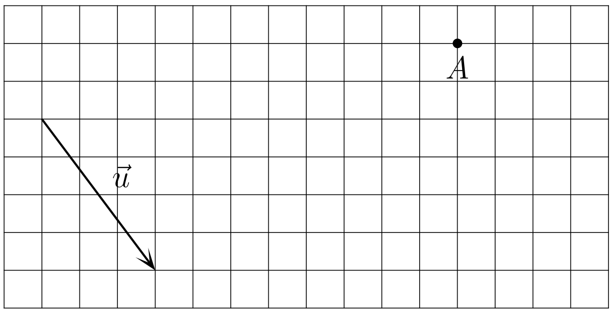
1. Tracer le point D image du point C par la translation qui transforme A en B.
2. Tracer le quadrilatère ABDC.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
4. Tracer le point F image du point E par la même translation.

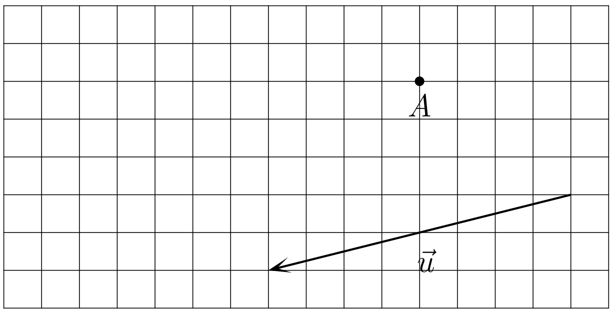


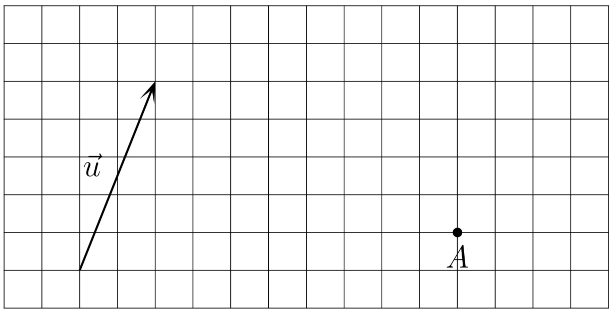
Exercice 4.5

Construire chaque fois le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.





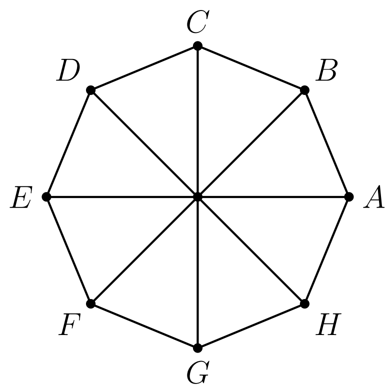




Exercice 4.6

$ABCDEFGH$ est un octogone régulier de centre O.

Compléter le tableau suivant par oui ou par non.



Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction (sont « parallèles »)				
ont le même sens				
ont la même norme (même longueur)				
sont égaux				

Exercice 4.7

On utilise la figure de l'exercice sur fiche n° 4.6

Indiquer chaque fois si l'affirmation est vraie ou fausse.

1. $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont égaux

2. $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont opposés

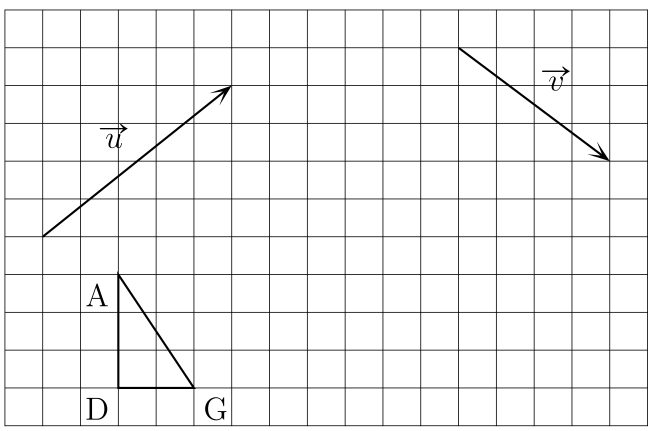
3. $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés

4. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de sens opposés

4.3 Somme de vecteurs

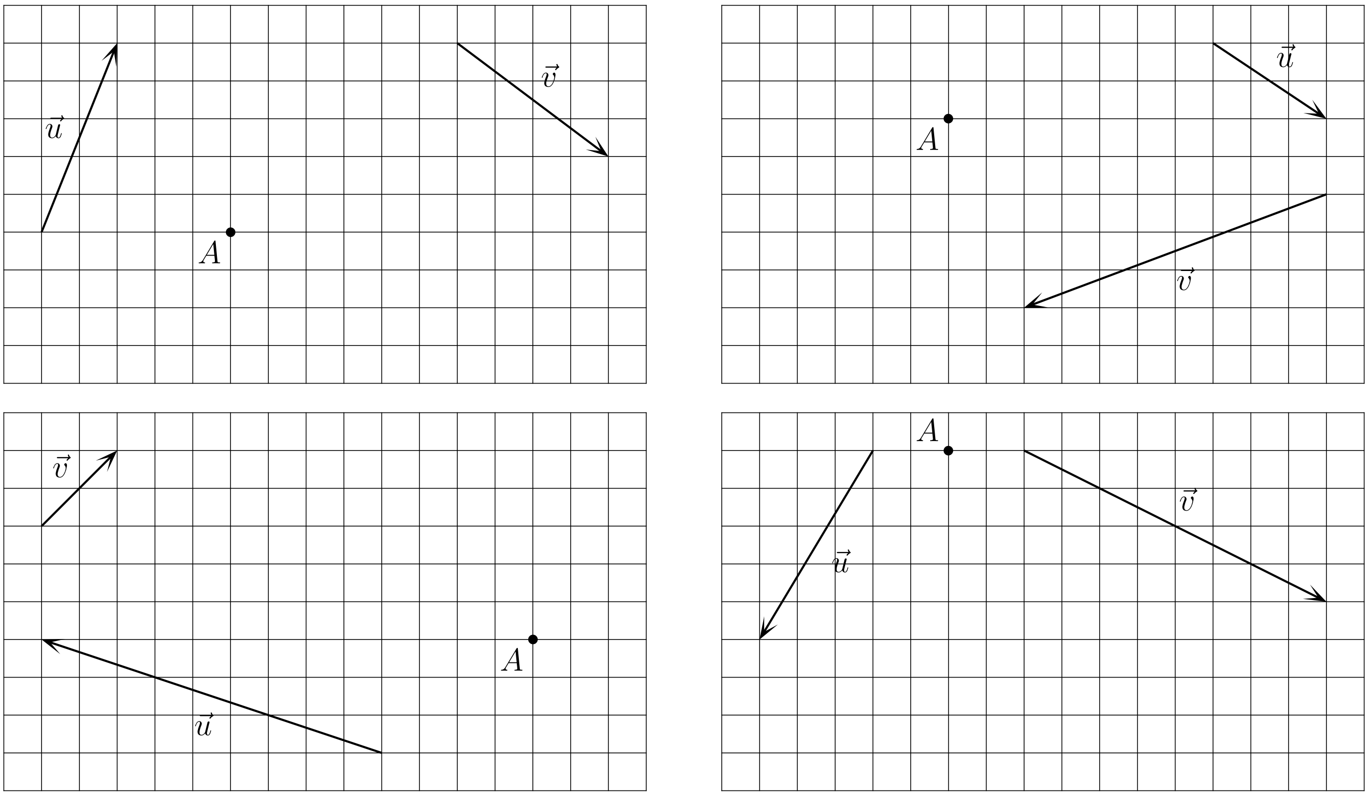
Exercice 4.8

1. L'image du triangle ADG par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le triangle BEH. Le tracer
2. L'image du triangle BEH par la translation de vecteur $\vec{v}$ est le triangle CFI. Le tracer.
3. Tracer le vecteur $\vec{w}$ de la translation qui transforme directement ADG en CFI. Ce vecteur $\vec{w}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $\boxed{\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}}$
4. Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On constate alors ce qu'on appelle la *relation de Chasles* : $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$



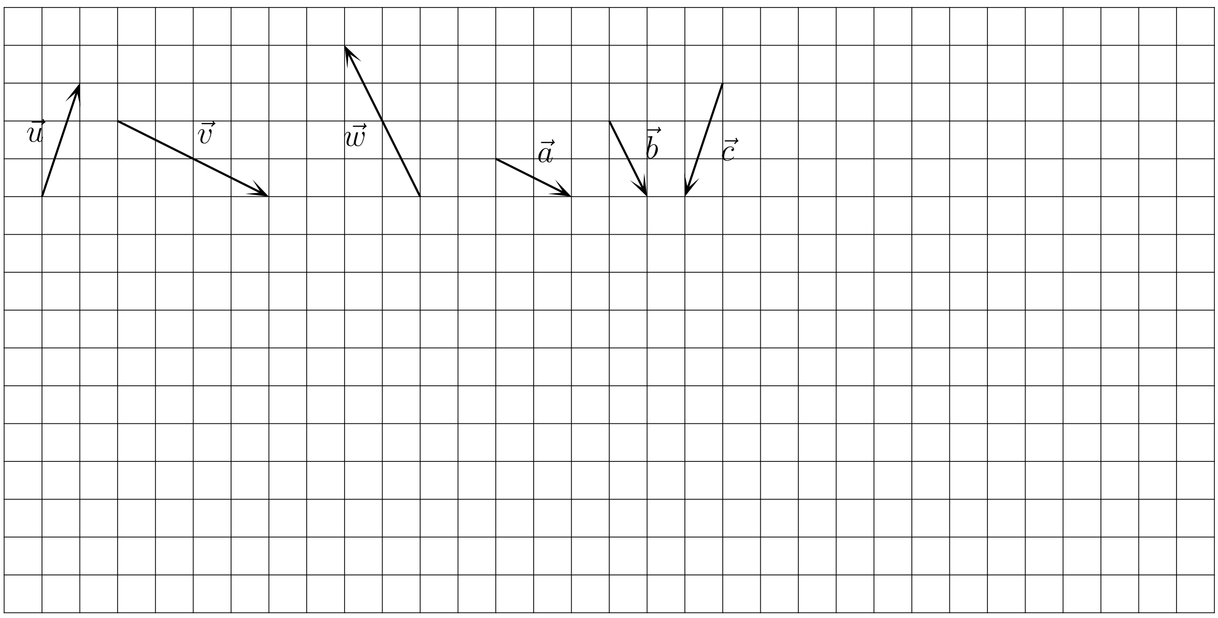
Exercice 4.9

Dans chaque figure, construire la somme de vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ à partir du point A.



Exercice 4.10

1. **1.** Placer un point sur le quadrillage ci-dessous, et à partir de ce point , construire la somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.
2. **2.** Même consigne, avec un nouveau point chaque fois, pour les sommes $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$ $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{a}$ $\overrightarrow{w}+\overrightarrow{b}$ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{c}$



Exercice 4.11

1. Compléter : $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BH} = \dots$
$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \dots$ $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HT} = \dots$

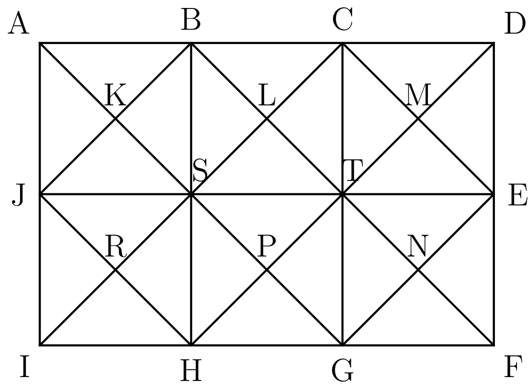
2. Compléter :

a) $\overrightarrow{HS} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{HS} + \overrightarrow{S\dots} = \overrightarrow{H\dots}$

b) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{C\dots} = \overrightarrow{D\dots}$

c) $\overrightarrow{JS} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JS} + \overrightarrow{S\dots} = \overrightarrow{J\dots}$

d) $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{G\dots} = \overrightarrow{F\dots}$



Exercice 4.12

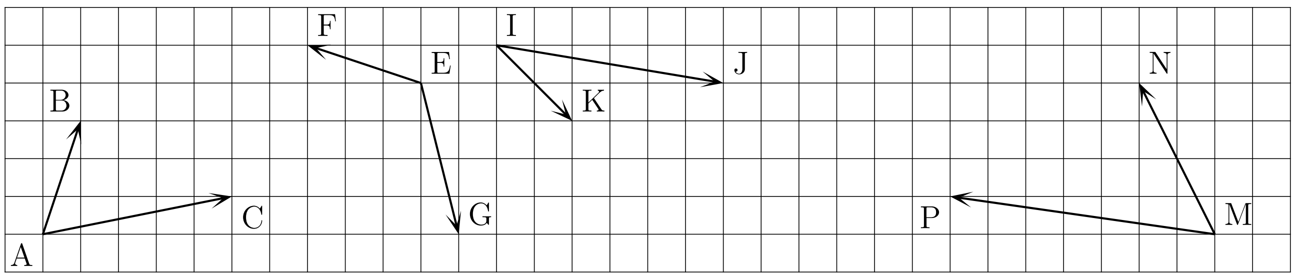
1. Tracer un parallélogramme ABCD.

2. Compléter : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\dots} = \overrightarrow{A\dots}$
Cette construction est une deuxième méthode de construction de la somme de deux vecteurs, c'est la *construction du parallélogramme*.

Exercice 4.13

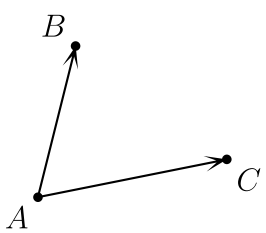
1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ en utilisant la construction du parallélogramme.

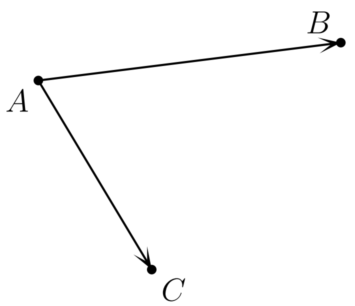
2. Même consigne pour les points H, L, R tels que
$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH}$ $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IL}$ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MR}$

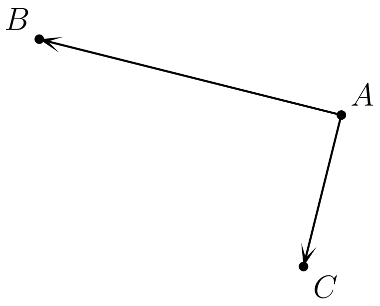


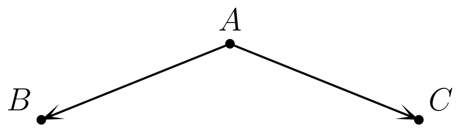
Exercice 4.14

Pour chacune des figures ci-dessous, construire à la règle et au compas le point D tel que :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



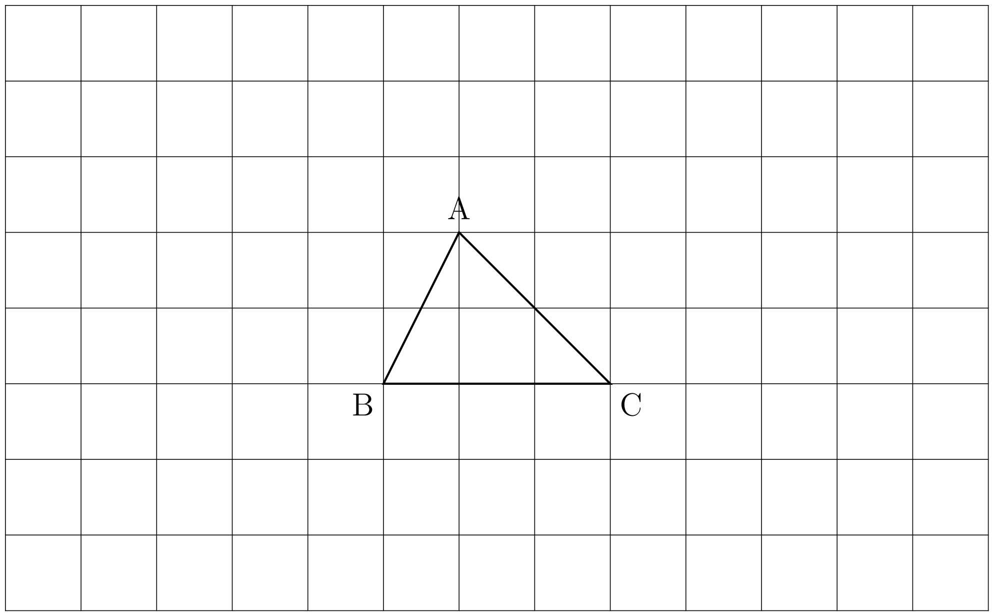






Exercice 4.15

Construire les points D et E tels que :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.



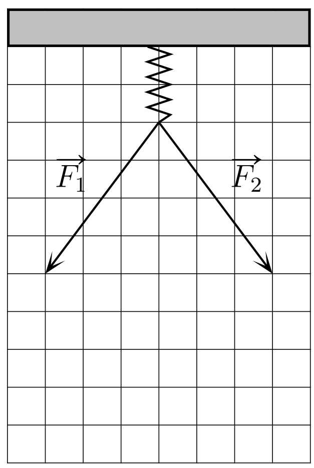
Exercice 4.16

1. Tracer un parallélogramme $ABCD$ de centre O.
2. Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF}$
3. Quelle est la nature des quadrilatères $OBEC$ et $OCFD$? Justifier.
4. Que peut-on dire du point C par rapport au segment $[EF]$? Le démontrer.

Exercice 4.17

Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ de 5 Newtons s'exercent sur un ressort comme cela est indiqué sur la figure. L'équivalent de ces deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, on l'appelle la résultante des 2 forces.

1. Construire cette somme de vecteurs.
2. Par lecture graphique donner en Newtons la force résultante.



4.4 Produit d'un vecteur par un nombre réel, vecteurs colinéaires

Exercice 4.18

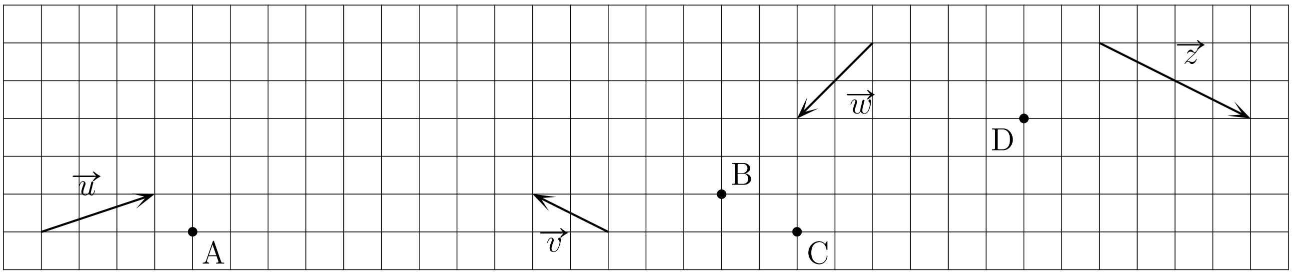
1. À partir du point A, tracer le vecteur $2\vec{u}$ ($2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$).

2. Tracer chaque fois le vecteur indiqué à partir du point indiqué.

a) le vecteur $3\vec{v}$ à partir du point B ;

b) le vecteur $-2\vec{w}$ à partir du point C ;

c) le vecteur $1,5\vec{z}$ à partir du point D.



Exercice 4.19

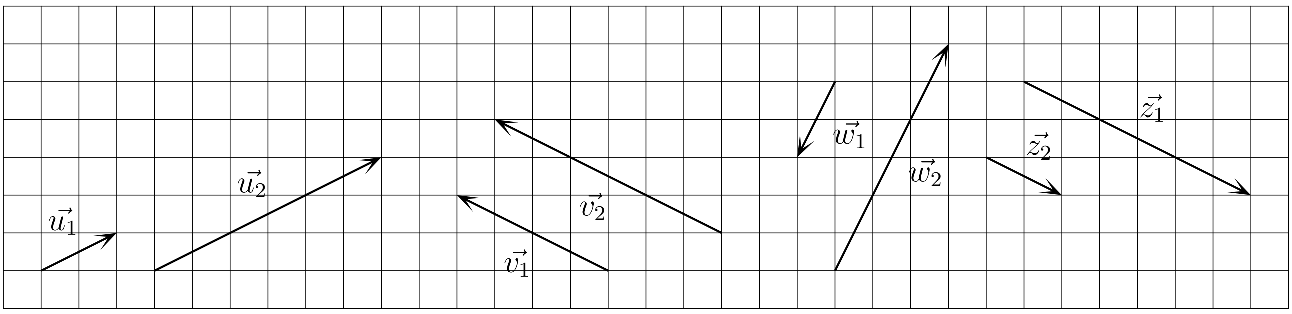
Déterminer chaque fois le nombre indiqué.

1. Le nombre k tel que $k\vec{u_1} = \vec{u_2}$

2. le nombre m tel que $m\vec{v_1} = \vec{v_2}$

3. le nombre n tel que $n\vec{w_1} = \vec{w_2}$

4. le nombre p tel que $p\vec{z_1} = \vec{z_2}$

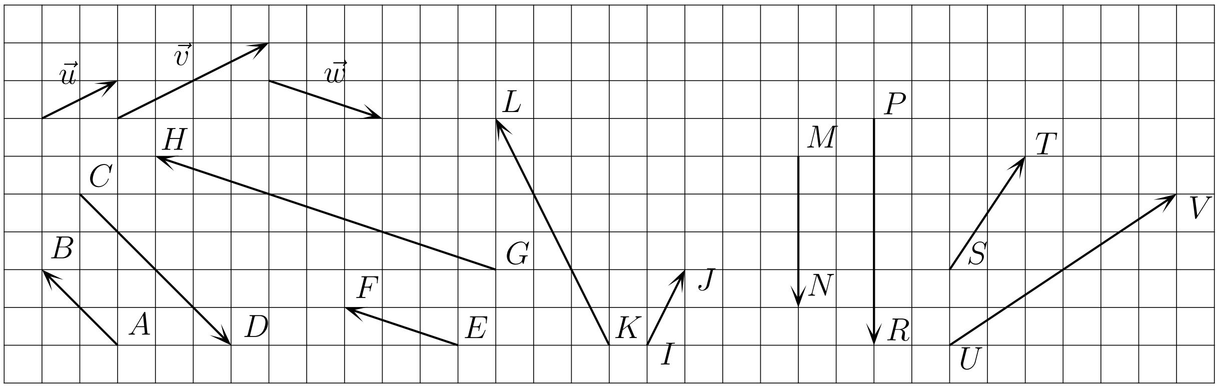


Exercice 4.20 (Vecteurs colinéaires)

Exemple et vocabulaire : sur la figure ci-dessous on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires parce que $2\vec{u} = \vec{v}$. On a aussi $\dfrac{1}{2}\vec{v} = \vec{u}$. En revanche, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires parce qu'on ne peut pas trouver un nombre k ou un nombre k' tels que $\vec{u} = k\vec{w}$ ou $\vec{w} = k'\vec{u}$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Si la réponse est oui, donner le nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ou le nombre k' tel que $\overrightarrow{CD} = k'\overrightarrow{AB}$.
2. Même question pour les vecteurs

   a) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ **b)** $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ **c)** $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PR}$ **d)** $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{UV}$



4.5 Problèmes de géométrie

Exercice 4.21

1. Tracer le triangle ABC rectangle en B tel $AB = 3$ cm et $BC = 4$ cm.
2. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
3. Placer le point E tel que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BC}$.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $ADBE$? Justifier.
5. Calculer le périmètre du quadrilatère $ADBE$. Justifier.

Exercice 4.22

1. Tracer un triangle ABC.
2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BC}$.
4. Que peut-on dire des droites (EF) et (BC) ? Justifier.
5. Justifier que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$. Indication : écrire de deux façons la somme $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$.
6. Que peut-on en déduire pour les points A, C, F ?
7. Cette figure fait penser à une propriété de géométrie. Laquelle ?

II Cours

4.0 Programme

Contenus

- Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M'. Direction, sens et norme.
- Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$ Vecteur nul.
- Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation De Chasles.
- Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.

Capacités attendues

- Représenter géométriquement des vecteurs.
- Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.

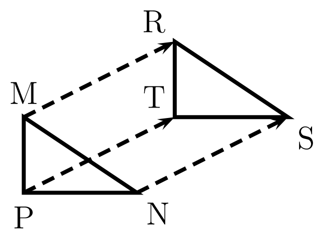
Approfondissement possible

Définition vectorielle des homothéties

4.1 Translation et vecteurs

Exemple 4.1

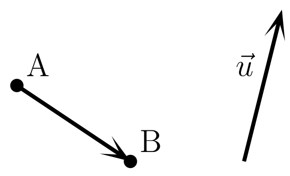
Dans la figure ci-contre, le triangle RST est l'image du triangle MNP par une **translation**.
On peut dire qu'on a fait glisser le triangle MNP sur le triangle RST, en ligne droite, sans tourner.
On dit aussi que cette translation est
la translation **de vecteur** $\boldsymbol{\overrightarrow{MR}}$



Définition 4.1 (Translation et vecteur)

- Une translation est un déplacement en ligne droite, sans tourner.
- Un vecteur est une flèche qui indique le déplacement de la translation.

Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point A est l'**origine** du vecteur et le point B est son **extrémité**.
Un vecteur peut être nommé par son origine et son extrémité (comme $\overrightarrow{AB}$) ou par une seule lettre (comme $\vec{u}$).



Définition 4.2 (Vecteur nul)

Si les points A et B sont confondus, on obtient le vecteur $\overrightarrow{AA}$ qui est le vecteur nul. $\boxed{\overrightarrow{AA} = \vec{0}}$

Définition 4.3 (Norme d'un vecteur)

La norme d'un vecteur est sa longueur.
La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc la longueur AB ou la distance AB.

4.2 Égalité de deux vecteurs

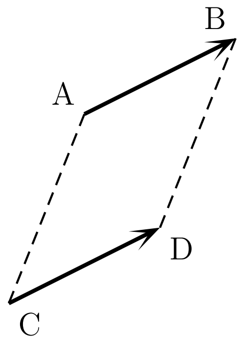


Fig. 4.1

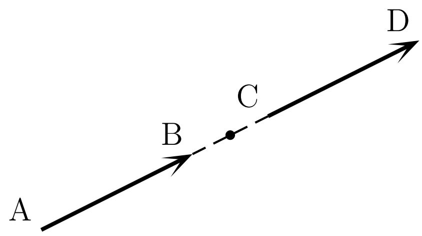


Fig. 4.2

Définition 4.4

Pour quatre points A, B, C, D, dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que c'est la même translation qui transforme A en B et C en D.

Propriété 4.1

Pour quatre points A, B, C, D, tels que A, B, C ne sont pas alignés,
ABDC est un parallélogramme, si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarque

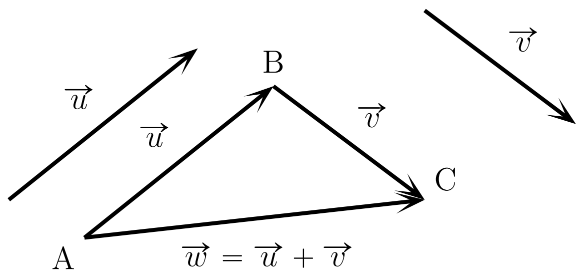
Pour quatre points A, B, C, D, tels que A, B, C sont alignés et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on obtient la figure 4.2.

Propriété 4.2

Pour quatre points A, B, C, D, dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

- ont la même direction (c'est à dire $(AB) \mathbin{/\!/} (CD)$) ;
- sont de même sens ;
- ont la même norme (même longueur).

4.3 Somme de deux vecteurs.



Définition 4.5

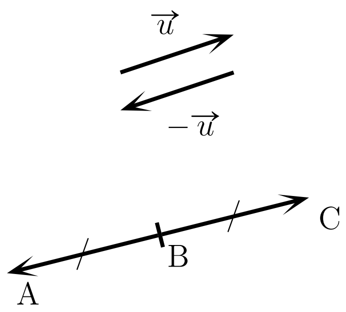
Si on enchaîne une translation de vecteur $\vec{u}$ puis une translation de vecteur $\vec{v}$ on obtient une translation de vecteur $\vec{w}$. On dit alors que ce vecteur $\vec{w}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété 4.3 (Relation de Chasles)

Pour trois points A, B, C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété 4.4 (Opposé d'un vecteur)

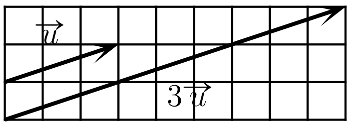
- L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ s'écrit $-\vec{u}$
- Un vecteur et son opposé ont même direction, même longueur, et sont de sens opposés.
- Pour deux points A et B, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- Pour trois points A, B, C dire que $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}$ équivaut à dire que B est le milieu de [AC]
- Pour deux points A et B et pour un vecteur $\vec{u}$, on a les égalités :
  $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$



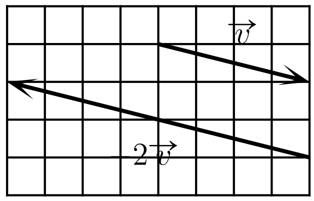
4.4 Produit d'un vecteur par un nombre réel.

Exemple 4.2

$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$



$-\vec{v} - \vec{v} = -2\vec{v}$



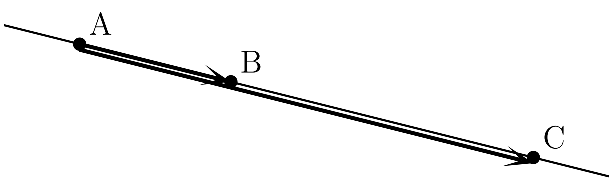
Remarque : si k est positif $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même sens ; si k est négatif $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de sens opposés.

Définition 4.6 (Vecteurs colinéaires)

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou qu'il existe un nombre k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$

Propriété 4.5 (Alignement de trois points)

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Propriété 4.6 (Droites parallèles)

Pour quatre points A, B, C, D, les droites (AB) et (CD) sont parallèles
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.