Chapitre 1

Les ensembles de nombres

I Exercices

1.1 Les différents types de nombres

Exercice 1.1 (Les entiers)

1. Qu'est ce qu'un entier naturel ? Donner la définition et un exemple.

. . . .

2. Le nombre -7 est-il un entier naturel ? . . . . un entier relatif ? . . . .

3. Comment sont notés l'ensemble des entiers naturels ? . . . l'ensemble des entiers relatifs ? . . .

Exercice 1.2 (Les décimaux et les fractions décimales)

1. Écrire sous forme de fraction décimale les nombres décimaux ci-dessous.

$3,74 =$ . . . . $25,9 =$ . . . . $0,826 =$ . . . .

2. Écrire sous forme de nombre à virgule les fractions décimales ci-dessous.

$\dfrac{573}{10} =$ . . . . $\dfrac{9\,051\,846}{1\,000} =$ . . . . $\dfrac{719}{100} =$ . . . .

3. Comment est noté l'ensemble des décimaux ? . . . .

Exercice 1.3 (Les nombres rationnels)

1. Qu'est ce qu'un nombre rationnel ? Donner la définition et un exemple.

. . . .

2. Les fractions $\dfrac{5}{7}$ et $\dfrac{10}{14}$ représentent-elles le même nombre rationnel ? Justifier par un calcul.

. . . .

3. Les fractions $\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{8}{15}$ représentent-elles le même nombre rationnel ? Justifier par un calcul.

. . . .

4. Le nombre 26 est-il un rationnel ? Justifier.

....

5. Le nombre $-5,71$ est-il un rationnel ? Justifier.

....

6. Le nombre $\dfrac{1}{3}$ est-il un décimal ? Justifier.

....

7. Comment est noté l'ensemble des rationnels ? ....

Exercice 1.4 (Les nombres réels)

1. Donner deux exemples de nombre qui soit réels, mais non rationnels.

....

2. Comment est noté l'ensemble des réels ? ....

Exercice 1.5 (Droite graduée)

Capacité attendue : associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.

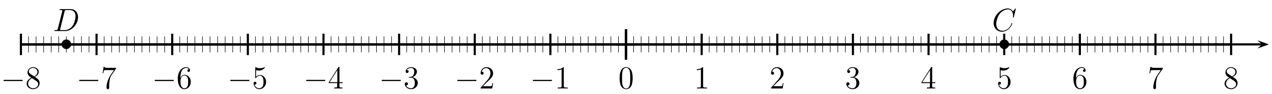
1. Sur la droite graduée ci-dessous,

a) placer le point A associé au nombre -6

b) placer le point B associé au nombre $1,8$

c) quel est le nombre associé au point C ? ....

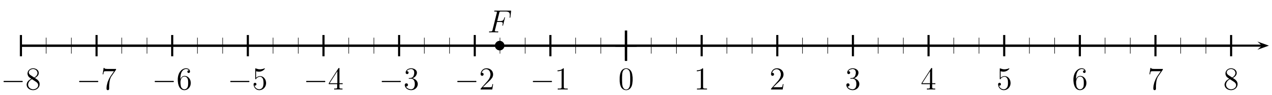
d) quel est le nombre associé au point D ? ....



2. Sur la droite graduée ci-dessous,

a) placer le point E associé au nombre $\dfrac{13}{3}$

b) quel est le nombre associé au point F ? ....



Exercice 1.6 (Le nombre $\sqrt{5}$ sur une droite graduée)

Le nombre $\sqrt{5}$ ne peut pas s'écrire de manière exacte sous forme décimale, ni même sous forme de fraction, mais géométriquement comment obtient-t-on un segment de longueur $\sqrt{5}$?

....

....

....

Exercice 1.7 (Les ensembles de nombres)

Indiquer les inclusions successives entre les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{D}$.

....

1.2 Encadrement et arrondi décimal d'un nombre réel.

Exercice 1.8

Capacité attendue : donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.

1. Encadrer $\dfrac{16}{7}$ au millième près : ....
2. Encadrer $\sqrt{394}$ à 10^{-2} près : ....

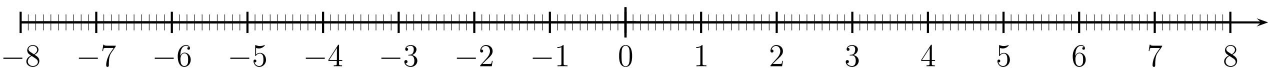
Exercice 1.9

Capacité attendue : dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Lire d'abord l'exemple 1.10 page 11

On veut placer approximativement le nombre $\sqrt{42}$ sur la droite graduée ci-dessous.

1. Arrondir $\sqrt{42}$ avec la précision utile : ....
2. Sur la droite graduée ci-dessous, placer approximativement le point G associé au nombre $\sqrt{42}$.



1.3 Intervalles

Exercice 1.10

Compléter ci-dessous.

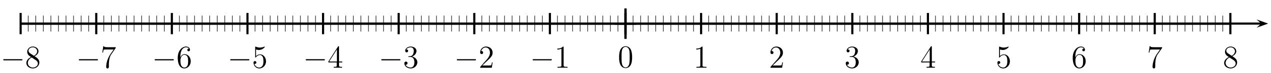
1. L'ensemble des nombres réels x tels que $3 \leqslant x \leqslant 5$ est l'intervalle ....
2. L'ensemble des nombres réels x tels que $1,3 < x \leqslant 1,7$ est l'intervalle ....
3. L'intervalle $[-4\ ;\ 2[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que ....
4. L'intervalle $[6\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que ....
5. L'ensemble des nombres réels x tels que $x \leqslant 7$ est l'intervalle ....

Exercice 1.11

Capacité attendue : représenter un intervalle de la droite numérique.

Lire d'abord l'exemple 1.8 page 10

Sur la droite graduée ci-dessous, représenter les intervalles :
$[3,7\ ;\ 6,1]$ $\qquad$ $]-7\ ;\ -5,5[$ $\qquad$ $]-4\ ;\ 1,2]$



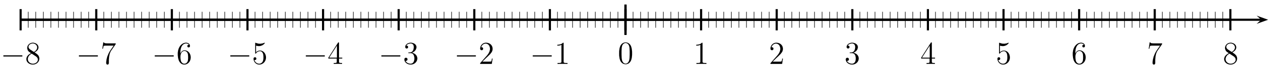
Exercice 1.12

Capacité attendue : déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.

Lire d'abord l'exemple 1.9 page 10

Dans les nombres ci-dessous, entourer ceux qui appartiennent à l'intervalle $[-3\ ;\ 6,4[$ et barrer ceux qui n'y appartiennent pas.

6,4 $\quad -2,9 \quad 0 \quad -3 \quad$ 2,579 $\quad$ 6,5 $\quad -3,5 \quad$ 6,35 $\quad -1,84$



1.4 Valeur absolue et distance entre deux nombres

Exercice 1.13

1. Compléter : $|14| =$ .... $\quad |-6,82| =$ .... $\quad |9,1| =$ .... $\quad \left|-\dfrac{19}{11}\right| =$ ....

2. Quel est le résultat affiché si l'on saisit le calcul suivant à la calculatrice : `3 × abs(-5)` ?

....

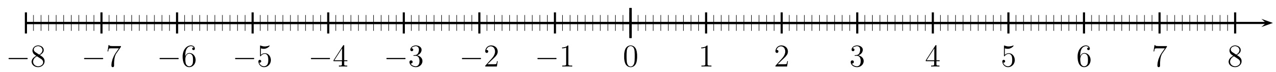
3. Calculer les distances entre les nombres indiqués ci-dessous, et vérifier sur la droite graduée plus bas.

a) Distance entre -6 et -2 : ....

b) Distance entre -3 et 7 : ....

c) Distance entre $2,6$ et $5,1$: ....

d) Distance entre $-1,3$ et $0,8$: ....



II Cours

1.0 Le programme

Contenus

- Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π.
- Notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
- Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels.
- Représentation de l'intervalle $[a-r\ ;\ a+r]$ puis caractérisation par la condition $|x-a| \leqslant r$.

Capacités attendues

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

1.1 Les différents types de nombres

1.1.a Les entiers

Les premiers nombres que l'on apprend sont les nombres entiers positifs : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; etc. On les appelle aussi *les nombres entiers naturels*. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

On apprend les nombres négatifs au collège, par exemple -1 -2 -3 ; etc. Les nombres entiers négatifs et positifs sont appelés les *entiers relatifs*, et l'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Remarque : l'ensemble des nombres entiers naturels est inclus dans l'ensemble des nombres entiers relatifs, on écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.1.b Les décimaux, et les fractions décimales

À l'école primaire, on apprend les nombres décimaux et les fractions décimales.

Par exemple 1,6 est un nombre décimal et on sait que $1{,}6 = 1 + \dfrac{6}{10} = \dfrac{16}{10}$.

Les nombres décimaux peuvent être positifs ou négatifs, et on peut les placer sur une droite graduée.

L'ensemble des nombres décimaux négatifs et positifs est noté $\mathbb{D}$.

Remarque :

- On peut toujours écrire un entier sous forme de décimal ou de fraction décimale, par exemple : $-5 = -5,0 = -\dfrac{50}{10}$ ou $17 = 17,0 = \dfrac{170}{10}$
- Donc l'ensemble des nombres entiers relatifs est inclus dans l'ensemble des décimaux, et on a donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

1.1.c Les nombres rationnels.

Qu'appelle-t-on un nombre rationnel ?

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction, par exemple $\dfrac{2}{3}$ ou $-\dfrac{1}{2}$.

Pourquoi ne pas dire tout simplement « fraction » au lieu de « nombre rationnel » ?
Parce qu'on peut avoir plusieurs fractions qui sont égales et qui représentent le même nombre rationnel, par exemple : $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{20}{30}$ donc les fractions $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{4}{6}$; $\dfrac{6}{9}$; $\dfrac{20}{30}$ représentent le même nombre rationnel.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Les entiers relatifs sont-ils des rationnels ?

Oui, parce qu'on peut toujours écrire un entier relatif sous forme de fraction, par exemple : $-4 = -\dfrac{4}{1}$ ou $9 = \dfrac{9}{1}$.

Les décimaux sont-ils des rationnels ?

Oui, parce qu'on a vu plus haut qu'on peut toujours écrire un décimal sous forme de fraction décimale.

Donc l'ensemble des nombres décimaux est inclus dans l'ensemble des rationnels et on a maintenant : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Les rationnels sont-ils tous des décimaux ?

Non, certains rationnels ne sont pas décimaux, par exemple $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

En effet, quand on saisit à la calculatrice $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$, on obtient : $\dfrac{1}{3} \approx 0,333333333$, ce qui signifie que $\dfrac{1}{3}$ est environ égal à 0,333333333 mais $\dfrac{1}{3}$ n'est pas égal à 0,333333333 parce que $3 \times \dfrac{1}{3} = 1$ alors que $3 \times 0,333333333 = 0,999999999 \neq 1$.

En fait, on ne peut pas trouver de nombre décimal égal à $\dfrac{1}{3}$, donc $\dfrac{1}{3}$ est un exemple de nombre rationnel qui n'est pas décimal.

1.1.d Les nombres réels

On a cru que tous les nombres étaient rationnels et, plusieurs siècles avant Jésus-Christ, on s'est rendu compte qu'on ne pouvait pas écrire $\sqrt{2}$ sous forme de fraction, c'est à dire que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

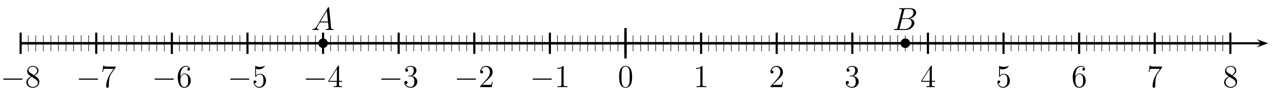
Un autre exemple de nombre qui ne peut pas s'écrire sous forme de fraction est le nombre π.

L'ensemble des nombres rationnels et non rationnels est appelé l'ensemble des réels et on le note $\mathbb{R}$.

1.1.e Droite graduée

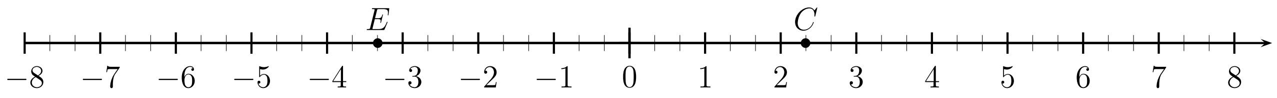
Exemple 1.1

Sur la droite graduée, le nombre -4 est associé au point A, et le nombre 3,7 est associé au point B.



Exemple 1.2

Sur la droite graduée, le nombre $\dfrac{7}{3}$ est associé au point C, et le nombre $-\dfrac{10}{3}$ est associé au point E.



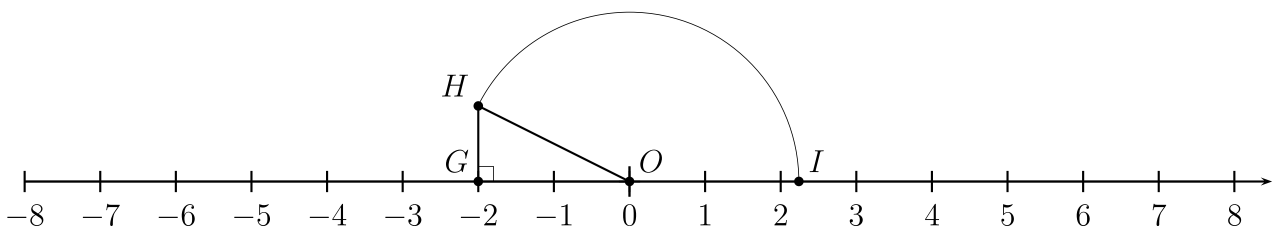
Exemple 1.3

OGH est un triangle rectangle en G tel que $OG = 2$ et $GH = 1$.

Donc, d'après le théorème de Pythagore, $OH^2 = OG^2 + GH^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.

Par conséquent, $OH = \sqrt{5}$, donc $OI = \sqrt{5}$.

Ainsi, sur la droite graduée, le nombre $\sqrt{5}$ est associé au point I.



1.1.f À retenir sur les ensembles de nombres

Définition 1.1

- L'ensemble des nombres entiers naturels, c'est à dire l'ensemble des entiers positifs est noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des nombres entiers négatifs et positifs est noté $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres décimaux négatifs et positifs est noté $\mathbb{D}$.
- L'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction, est noté $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble des nombres réels, c'est à dire l'ensemble nes nombres rationnels et non rationnels, est noté $\mathbb{R}$.

Propriété 1.1

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Propriété 1.2

- Tout nombre réel est associé à un point d'une droite graduée.
- Tout point d'une droite graduée est associé à un nombre réel.

1.2 Appartenir à un ensemble

Dans les paragraphes précédents, nous venons d'étudier des ensembles de nombres.

Par exemple 7 est un entier naturel, on dit que 7 *appartient* à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et on écrit $7 \in \mathbb{N}$.

Autre exemple : 7,2 n'est pas un entier naturel, on dit que 7,2 *n'appartient pas* à l'ensemble $\mathbb{N}$ et on écrit $7{,}2 \notin \mathbb{N}$.

Le fait d'appartenir à un ensemble ne concerne pas que les nombres, puisqu'on dit aussi par exemple qu'un point *appartient* à une droite ou qu'un point *n'appartient pas* à une droite.

1.3 Encadrement et arrondi décimal d'un nombre réel.

Unité, dixième, centième, etc.

On encadre ou on arrondit un nombre, à l'unité, au dixième, au centième, etc.

Dressons d'abord le tableau ci-dessous pour rappeler ce que ça veut dire.

	Arrondir	**Nombre de chiffres après la virgule**
$1 = 10^0$	à l'unité près	0 chiffre
$\frac{1}{10} = 0,1 = 10^{-1}$	au dixième près ou à 10^{-1} près	1 chiffre
$\frac{1}{100} = 0,01 = 10^{-2}$	au centième près ou à 10^{-2} près	2 chiffres
$\frac{1}{1000} = 0,001 = 10^{-3}$	au millième près ou à 10^{-3} près	3 chiffres

Amplitude

La précision de l'encadrement est aussi appelé l'amplitude :

- un encadrement à l'unité près a une amplitude de 1 ;
- un encadrement au dixième près a une amplitude de $\dfrac{1}{10}$;
- un encadrement au centième près a une amplitude de $\dfrac{1}{100}$.

Exemple 1.4

Encadrement du nombre réel $\sqrt{3}$.

$\sqrt{3} \approx 1,732$

Encadrement de $\sqrt{3}$ à l'unité près : $1 < \sqrt{3} < 2$

Encadrement de $\sqrt{3}$ au dixième près : $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

Encadrement de $\sqrt{3}$ au centième près : $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

Propriété 1.3 (Règle d'arrondi)

Si on veut arrondir un nombre décimal à n chiffres après la virgule, on regarde le chiffre suivant :
- si ce chiffre est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 on arrondit en dessous ;
- si ce chiffre est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 on arrondit au dessus.

Exemple 1.5

- Arrondir 6,2375 à l'unité près
  Le chiffre des unités est 6, le suivant est 2, donc on arrondit en dessous : $6,2375 \approx \boxed{6}$.
  En fait, on a : $6 < 6,2375 < 7$ et on arrondit à 6 parce que 6,2375 est plus proche de 6 que de 7.
- Arrondir 6,2375 au centième près
  Le chiffre des dixième est 3, le suivant est 7, donc on arrondit au dessus : $6,2375 \approx \boxed{6,24}$.
  En fait, on a : $6,23 < 6,2375 < 6,24$ et on arrondit à 6,24 parce que 6,2375 est plus proche de 6,24 que de 6,23.
- Arrondir 6,2375 au millième près
  Le chiffre des millième est 7, le suivant est 5, donc on arrondit au dessus : $6,2375 \approx \boxed{6,238}$.
  Ici, on a : $6,237 < 6,2375 < 6,238$ mais dans ce cas 6,2375 est aussi proche de 6,237 que de 6,238 et par convention, on arrondit au dessus.

1.4 Intervalles

Définition 1.2 (Intervalle)

- L'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
- L'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a\ ;\ b[$.
- L'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a\ ;\ b[$.
- L'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leqslant b$ est l'intervalle $]a\ ;\ b]$.

Vocabulaire : dans la définition ci-dessus, les nombres a et b sont appelés les *bornes* de l'intervalle.

Un intervalle peut aussi être un ensemble de nombres réels inférieurs à un nombre ou supérieurs à un nombre.

Par exemple, pour l'ensemble des nombres supérieurs à 7, on considère que c'est l'ensemble des nombres compris entre 7 et « plus l'infini » ($+\infty$) et on écrit cet intervalle $]7\ ;\ +\infty[$.

Définition 1.3 (Intervalle avec borne infinie)

- L'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant a$ est l'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$.
- L'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$ est l'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$.
- L'ensemble des nombres réels x tels que $x \leqslant b$ est l'intervalle $]-\infty\ ;\ b]$.
- L'ensemble des nombres réels x tels que $x < b$ est l'intervalle $]-\infty\ ;\ b[$.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

1.5 Valeur absolue et distance entre deux nombres

Définition 1.4 (Valeur absolue)

- Si a est un nombre positif ou nul, la valeur absolue de a est a
- Si a est un nombre négatif la valeur absolue de a est $-a$
- La valeur absolue de a s'écrit $|a|$.

Exemple 1.6

- 5,8 est positif, donc sa valeur absolue est 5,8 : $|5,8| = 5,8$
- -4 est négatif, donc sa valeur absolue est $-(-4) = 4$: $|-4| = 4$

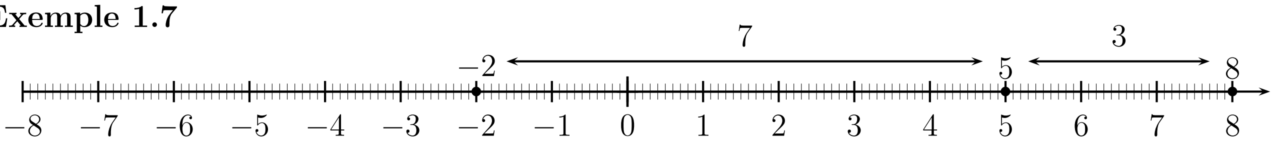
Remarques

- La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.
- Sur les calculatrices, dans un tableur, ou dans les langages de programmation, on obtient la valeur absolue avec la commande `abs`.

Propriété 1.4 (Distance entre deux nombres)

La distance entre deux nombres a et b est $|b-a|$.

Exemple 1.7



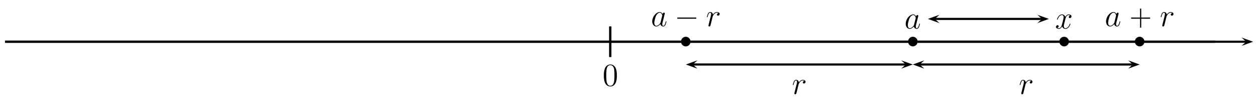
- La distance entre -2 et 5 est 7, en effet : $|-2-5| = |-7| = 7$ ou $|5-(-2)| = |5+2| = |7| = 7$
- La distance entre 5 et 8 est 3, en effet : $|5-8| = |-3| = 3$ ou $|8-5| = |3| = 3$

Propriété 1.5

On considère des nombres a, x et r un nombre strictement positif.
Dire que x est dans l'intervalle $[a - r\ ;\ a + r]$ équivaut à $|x - a| \leqslant r$.

Explication et schéma

La propriété ci-dessus signifie que dire que x est dans l'intervalle $[a - r\ ;\ a + r]$ revient à dire que la distance entre a et x est inférieure ou égale à r.



Démonstration

$$\begin{aligned} x \in [a - r\ ;\ a + r] &\iff a - r \leqslant x \leqslant a + r \\ &\iff -r \leqslant x - a \leqslant +r \\ &\iff |x - a| \leqslant r \end{aligned}$$

1.6 Les capacités attendues du chapitre

1.6.a Droite graduée

Capacité attendue : associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.

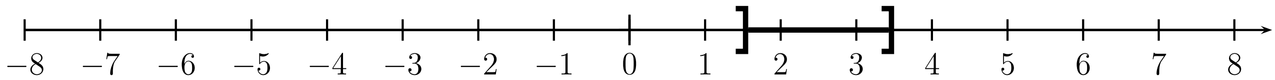
Voir les exemples 1.1, 1.2, 1.3.

1.6.b Représenter un intervalle

Capacité attendue : représenter un intervalle de la droite numérique.

Exemple 1.8

L'intervalle $]1{,}5\,;\ 3{,}5]$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que : $1,5 < x \leqslant 3,5$, et il est représenté ci-dessous.



1.6.c Appartenance à un intervalle

Capacité attendue : déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.

Exemple 1.9

Les nombres ci-dessous appartiennent-ils à l'intervalle $[-3\ ;\ 5[$?

$-3,1$ 4,6 5 -3 $\sqrt{26}$ $-\dfrac{20}{7}$

$-3,1 < -3$ donc $\boxed{-3,1 \notin [-3\ ;\ 5[}$

$-3 \leqslant 4,6 < 5$ donc $\boxed{4,6 \in [-3\ ;\ 5[}$

$-3 \in [-3\ ;\ 5[$ parce que $-3 \leqslant -3 < 5$.

$\boxed{5 \notin [-3\ ;\ 5[}$

$-3 = -\dfrac{3}{1} = -\dfrac{3 \times 7}{1 \times 7} = -\dfrac{21}{7}$ donc $-3 \leqslant -\dfrac{20}{7}$

et comme $-\dfrac{20}{7}$ est négatif, il est inférieur à 5, donc $-3 \leqslant -\dfrac{20}{7} < 5$, donc $\boxed{-\dfrac{20}{7} \in [-3\ ;\ 5[}$.

$\sqrt{26} \approx 5,099$, donc $\sqrt{26} > 5$, donc $\boxed{\sqrt{26} \notin [-3\ ;\ 5[}$.

1.6.d Encadrement d'un réel

Capacité attendue : donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.

Voir l'exemple 1.4

1.6.e Arrondi, chiffres significatifs

Capacité attendue : dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Voir l'exemple 1.5 qui donne les arrondis d'un nombre à l'unité, au centième et au millième.

Mais la capacité attendue ci-dessus précise d'arrondir *en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.* Cela signifie qu'il faut savoir choisir selon la situation si on arrondit à l'unité, au dixième, au centième, etc. Voir l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.10

Placer $\dfrac{40}{17}$ sur la droite graduée ci-dessous.

Avec la calculatrice, on obtient : $\dfrac{40}{17} \approx 2,352941$.

Sur la droite graduée ci-dessous, les graduations les plus petites sont des centièmes, donc, on arrondit $\dfrac{40}{17}$ au centième près. Dans le résultat de la calculatrice, le chiffre des centièmes est 5, le suivant est 2, donc d'après la règle d'arrondi (propriété 1.3), on arrondit en dessous $\dfrac{40}{17} \approx 2,35$.