Chapitre 6

Compléments sur les dérivées

I Exercices

6.1 Signe d'une expression

6.1.a Signe de $ax + b$

Exercice 6.1

Étudier le signe de $4x + 12$ selon les valeurs de x, puis compléter le tableau ci-dessous.

Voir les exemples 6.1 et 6.2 page 75.

. . . .

. . . .

. . . .

x	
Signe de $4x + 12$	

Exercice 6.2

Pour chaque expression ci-dessous, étudier son signe selon les valeurs de x, puis compléter le tableau.

. . . .

. . . .

. . . .

x	
Signe de $-2x + 7$	

. . . .

. . . .

. . . .

x	
Signe de $5x-9$	

. . . .

. . . .

. . . .

x	
Signe de $-3x-10$	

6.1.b Signe de ax^2+bx+c

Exercice 6.3

Étudier le signe de $2x^2+8x-10$ selon les valeurs de x, puis compléter le tableau de signe ci-dessous.
Voir les exemples 6.3 et 6.4 et 6.5 page 76.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

x	
Signe de $2x^2+8x-10$	

6.2 Fonction et calculatrice

Exercice 6.4

La fonction f est définie par $f(x)=3x^2-42x-100$ sur l'intervalle $[-5\ ;\ 15]$
Avec la calculatrice afficher la courbe de la fonction f.
Voir l'exemple 6.7 du cours.

Exercice 6.5

La fonction f est définie par $f(x)=5x^3+30x^2-480x-500$ sur l'intervalle $[-13\ ;\ 9]$
Avec la calculatrice afficher la courbe de la fonction f.

Exercice 6.6

Avant de faire cet exercice, voir l'exemple 6.8 page 77.

Déterminer avec la calculatrice le maximum de la fonction f définie par $f(x) = -4x^3+26x^2+64x-200$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$. Arrondir au millième près.

Pour la courbe, voici le réglage de la fenêtre :

```
Xmin=0      Xmax=8     Xgrad=1
Ymin=-200   Ymax=350   Ygrad=50
```

6.3 Dérivée et variations d'une fonction

6.3.a Dérivée, tangente et signe de la dérivée.

Exercice 6.7

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ et elle est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.

- La droite (EA) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $A(2\ ;\ 12)$.
- La droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $B(3\ ;\ 5,5)$.
- La droite (CF) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $C(4\ ;\ 14)$.

f' est la dérivée de f.

1. Compléter ci-dessous d'après le graphique.

$f'(2) =$ ....

$f'(3) =$ ....

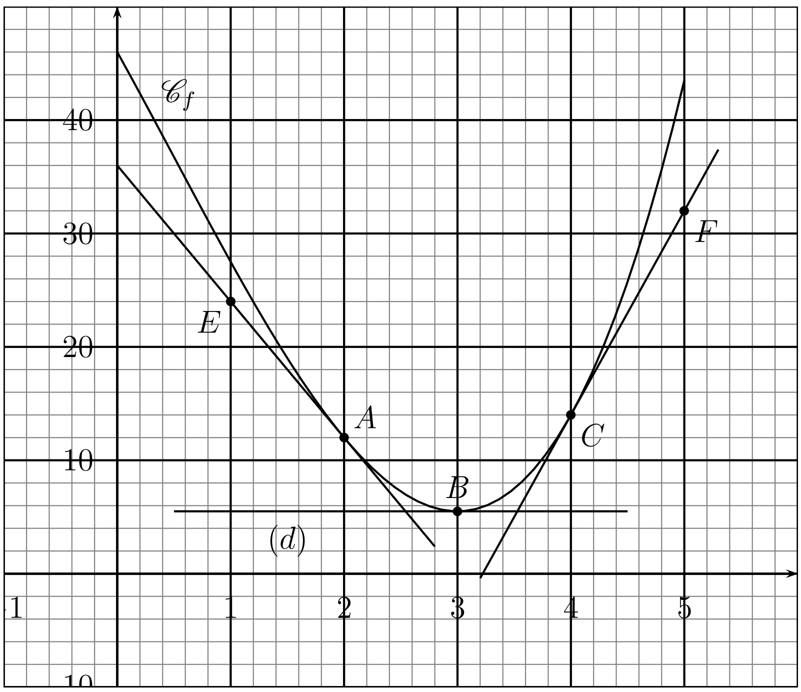
$f'(4) =$ ....

2. Compléter ci-dessous.

La dérivée est positive sur l'intervalle ....

La dérivée est négative sur l'intervalle ....

3. Vérifier avec les propriétés 6.4 et 6.5 page 78.



6.3.b Fonctions du second degré

Exercice 6.8

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 + 6x + 3$ sur l'intervalle $[-8\ ;\ 5]$.

Pour répondre aux questions ci-dessous, on pourra voir les propriétés 6.4 et 6.5 et l'exemple 6.10 page 78.

1. Calculer la dérivée de f.

$f'(x) =$ ....

2. Étudier le signe de la dérivée.

....

....

....

3. Compléter le tableau de variations de la fonction f.

....

....

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

4. Vérifier à la calculatrice si la courbe correspond au tableau de variations (voir exemple 6.7 page 77).

5. Déterminer le minimum de f et la valeur de x où il est atteint.

minimum = ...atteint en x = ...

Exercice 6.9

Une entreprise produit des pièces automobiles. Une étude de marché permet d'estimer que la production pour le mois à venir est comprise entre 800 et 1 500 pièces automobiles. On s'intéresse au bénéfice de l'entreprise sur la vente des pièces automobiles produites.

On décide de modéliser l'évolution du bénéfice de l'entreprise, exprimé en centaine d'euros, par la fonction f définie ci-dessous :

$f(x) = -2x^2 + 46x - 234$, sur l'intervalle$[8\,;\,15]$.

1. Calculer la dérivée de f.

$f'(x) =$ ....

2. Étudier le signe de la dérivée.

....

....

....

3. Compléter le tableau de variations de la fonction f.

....

....

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

4. Les valeurs de x, arrondies au centième, représentent le nombre de centaines pièces automobiles produites. Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ?

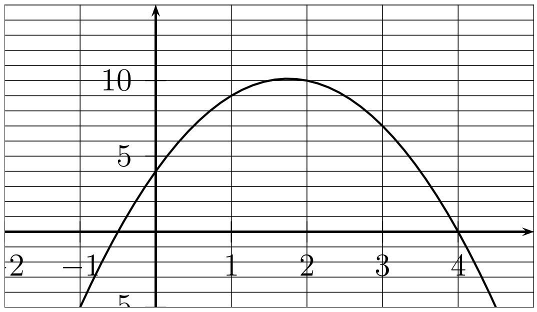
....

....

....

Exercice 6.10

La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée dans le repère ci-contre.



1. Avec la précision permise par le graphique, indiquer approximativement le maximum de f et la valeur de x où il est atteint. maximum ≈ .... $x \approx$ ....

2. La fonction f est définie par $f(x) = -2x^2 + 7x + 4$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$

Calculer sa dérivée : $f'(x) =$ ....

3. Étudier le signe de la dérivée.

....

....

....

4. Compléter le tableau de variation de la fonction f.

....

....

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

5. Quel est le maximum de f et en quelle valeur de x est-il atteint ? Donner les valeurs exactes.

maximum = ... $x =$ ....

6.3.c Fonctions du troisième degré

Exercice 6.11

La fonction f est définie sur $[-8 ; 6]$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 10$

1. Calculer la dérivée de f.

   $f'(x) =$ ....

2. Étudier le signe de la dérivée.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Compléter le tableau de variations de f sur $[-8 ; 6]$.

   ....

   ....

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

Exercice 6.12

Dans cet exercice, arrondir au millième si c'est nécessaire.

La fonction f est définie sur $[-4 ; 3]$ par $f(x) = -2x^3 + x^2 + 20x + 7$.

1. Calculer la dérivée de f.

   $f'(x) =$ ....

2. Étudier le signe de la dérivée.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Compléter le tableau de variations de f sur $[-4\ ;\ 3]$.

. . . .

. . . .

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

4. Quel est le minimum de f et en quelle valeur de x est-il atteint ?

minimum $\approx$ . . . . $x \approx$ . . . .

6.3.d Quotient de fonctions

Exercice 6.13

Pour faire cet exercice, voir le rappel des formules de dérivées 6.3 et l'exemple 6.9 page 78.

Calculer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x+2}{4x-1}$

$u(x) = 3x + 2 \qquad v(x) = 4x - 1$

$u'(x) =$ . . . . $\quad v'(x) =$ . . . .

$f'(x) =$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 6.14

Dans une entreprise fabriquant des vestes, le coût de production unitaire, exprimé en euros pour x vestes fabriquées, est donné par la fonction C définie par :

$C(x) = \dfrac{300x + 200}{5x + 2}$. pour $x \in [1\ ;\ 10]$.

1. Calculer le coût de production unitaire de 6 vestes.

. . . .

2. Calculer le coût de production total de 10 vestes.

. . . .

3. On note C' la dérivée de C. Démontrer que $C'(x) = -\dfrac{400}{(5x + 2)^2}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. Déterminer le sens de variation de la fonction C. Justifier.

. . . .

. . . .

. . . .

5. Interpréter le sens de variation de C pour le coût de production unitaire des vestes fabriquées par cette entreprise.

. . . .

. . . .

6.4 Exercice de baccalauréat

Exercice 6.15 (Bac STMG, Polynésie, juin 2014, exercice 4)

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de produits fabriqués exprimé en centaines d'unités.

On admet que la fabrication est comprise entre 0 et 700 unités.

Les recettes et les coûts sont exprimés en milliers d'euros.

Partie A lecture graphique

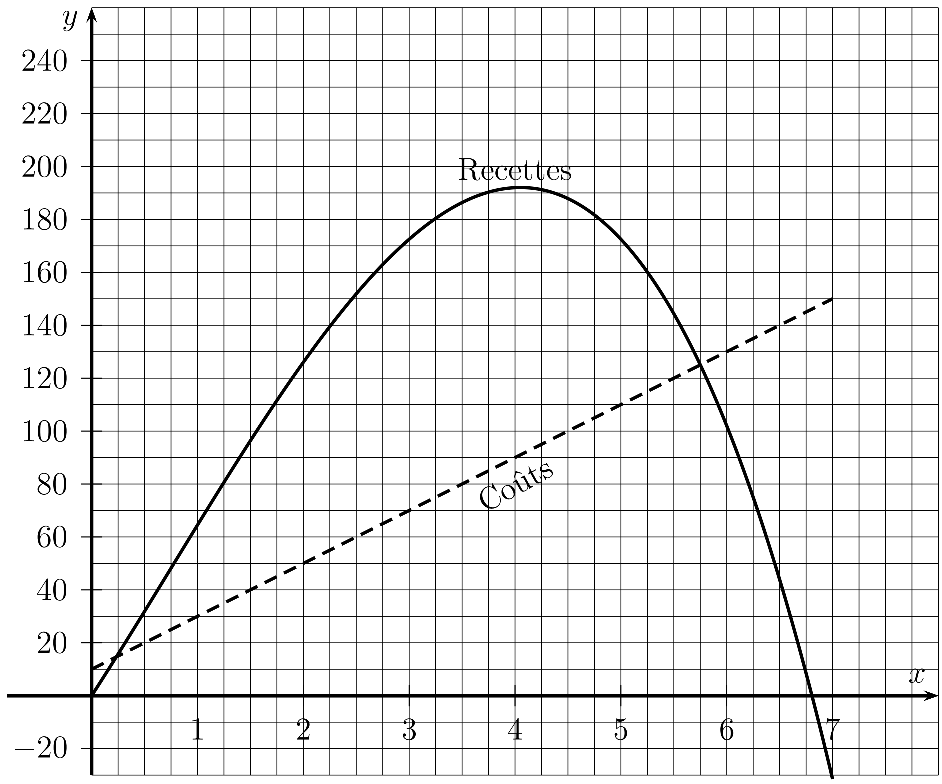
Répondre aux questions suivantes en vous aidant du graphique ci-dessous.

1. Combien faut-il fabriquer de produits pour avoir une recette égale à 140 000 euros ?

....

2. Combien de produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice positif ou nul ?

....



Partie B étude du bénéfice

On modélise :

- les recettes par la fonction R définie sur $[0\,;\,7]$ par $R(x) = -2x^3 + 4,5x^2 + 62x$
- les coûts par la fonction C définie sur $[0\,;\,7]$ par $C(x) = 20x + 10$.

1. Calculer la recette et le coût pour 300 produits fabriqués.
En déduire le bénéfice correspondant.

....

....

....

2. On note B la fonction bénéfice. Donner l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,7]$.

....

....

....

....

3. Vérifier que $B'(x) = -6x^2 + 9x + 42$ où B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.

....

....

4. Étudier le signe de $B'(x)$ et compléter le tableau de variations de B.

....

....

....

....

....

....

x	
Signe de $B'(x)$	
Variations de B	

5. En déduire la valeur du bénéfice maximal ainsi que le nombre de produits à fabriquer pour l'obtenir.

....

....

II Cours

6.1 Signe d'une expression

6.1.a Signe de $ax + b$

Propriété 6.1 (Signe de $ax + b$)

Le signe de $ax + b$ selon les valeurs de x est donné par le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple 6.1 (Signe de $2x + 10$ selon les valeurs de x.)

$a = 2$ le signe de $-a$ est $-$ le signe de a est $+$

$2x + 10 = 0 \iff 2x = -10 \iff x = \dfrac{-10}{2} = 5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $2x + 10$		$-$	0	$+$	

Exemple 6.2 (Signe de $-3x + 12$ selon les valeurs de x.)

$a = -3$ le signe de $-a$ est $+$ le signe de a est $-$

$-3x + 12 = 0 \iff -3x = -12 \iff x = \dfrac{-12}{-3} = 4$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $-3x + 12$		$+$	0	$-$	

6.1.b Signe de $ax^2 + bx + c$

Propriété 6.2 (Équation du second degré, $ax^2 + bx + c = 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac$

Quand on résout l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, les trois cas ci-dessous peuvent se produire.

Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété 6.3 (Signe de $ax^2 + bx + c$)

Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a	

Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de a	

Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple 6.3 (Signe de $3x^2 - 5x + 7$ selon les valeurs de x.)

$a = 3 \quad b = -5 \quad c = 7$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 7 = -59 \qquad \Delta < 0 \qquad$ l'équation $3x^2 - 5x + 7 = 0$ n'a pas de solution.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $3x^2 - 5x + 7$		$+$	

Exemple 6.4 (Signe de $-x^2 + 6x - 9$ selon les valeurs de x.)

$a = -1 \quad b = 6 \quad c = -9$

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 0 \qquad \Delta = 0$

L'équation $-x^2 + 6x - 9 = 0$ a une seule solution : $x_0 = -\dfrac{6}{2 \times (-1)} = -\dfrac{6}{-2} = 3$

$a = -1 \qquad$ le signe de a est $-$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $-x^2 + 6x - 9$		$-$	0	$-$	

Exemple 6.5 (Signe de $2x^2 + 2x - 40$ selon les valeurs de x.)

$a = 2 \quad b = 2 \quad c = -40$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-40) = 324 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{324} = 18 \qquad \Delta > 0$

L'équation $2x^2 + 2x - 40 = 0$ a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2 - 18}{2 \times 2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-2 + 18}{2 \times 2} = 4$

$a = 2 \qquad$ le signe de $-a$ est $- \qquad$ le signe de a est $+$

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
Signe de $2x^2 + 2x - 40$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6.2 Fonction et calculatrice

Méthode 6.1 (Afficher un tableau de valeurs à la calculatrice)

- Dans l'éditeur de fonctions (touche f(x)), saisir la fonction f.
- Appuyer sur 2nde [déf table]
- Dans la fenêtre, sur la ligne `Indpnt`, aller sur `Auto` et appuyer sur entrer
- Appuyer sur 2nde [table]

Exemple 6.6 (Calculer l'image de nombres à la demande à la calculatrice)

La fonction f est définie par $f(x) = -4x^2 + 9x + 37$ et on veut calculer $f(-5)$, $f(4)$ et $f(12)$.

- Dans l'éditeur de fonctions (touche f(x)), saisir la fonction f.
- Appuyer sur 2nde [déf table]
- Dans la fenêtre, sur la ligne `Indpnt`, aller sur `Dem` et appuyer sur entrer
- Appuyer sur 2nde [table]
- Dans la colonne `X`,
  - saisir `-5`, puis appuyer sur entrer, et dans la colonne `Y`, on voit `-108`
  - saisir `4`, puis appuyer sur entrer, et dans la colonne `Y`, on voit `9`
  - saisir `12`, puis appuyer sur entrer, et dans la colonne `Y`, on voit `-431`

On a donc : $f(-5) = -108 \qquad f(4) = 9 \qquad f(12) = -431$.

Exemple 6.7 (Courbe d'une fonction à la calculatrice)

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 6x + 4$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$.

- Dans l'éditeur de fonctions (touche f(x)), saisir la fonction f.
- Dans fenêtre, saisir les valeurs de l'intervalle : Xmin=-2 et Ymin=10.
- Dans Zoom, choisir ZMinMax ou AjustZoom
- Appuyer sur entrer

Exemple 6.8 (Maximum d'une fonction à la calculatrice)

On veut connaître le maximum de la fonction f définie par :

$f(x) = -2x^3 + 8x^2 + 22x - 28$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.

- Afficher la courbe de la fonction f à la calculatrice.
  Réglage de la fenêtre :

  ```
  Xmin=0     Xmax=6     Xgrad=1
  Ymin=-40   Ymax=80    Ygrad=10
  ```
- Appuyer sur 2nde [calculs]
- Descendre sur `maximum`, et appuyer sur entrer.
- On voit `Borne Inf` : placer le curseur un peu à gauche du sommet et appuyer sur entrer.
- On voit `Borne Sup` : placer le curseur un peu à droite du sommet et appuyer sur entrer.
- On voit `Valeur Init` : appuyer sur entrer.
- On voit :
  `Maximum`
  `X=3.66667    Y=61.62963`

Donc le maximum de la fonction f est environ 61,63 et il est atteint pour $x \approx 3,67$

6.3 Rappel des formules de dérivées

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2\,x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3\,x^2$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Dérivée d'une somme de fonctions	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée d'une fonction multipliée par une constante	$(k\,u)' = k\,u'$
Dérivée d'un quotient de fonctions	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Exemple 6.9 (Dérivée d'un quotient de fonctions)

On veut dériver la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x-4}{2x+1}$

Formule à appliquer : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

On pose alors : $u(x) = 5x - 4$ $v(x) = 2x + 1$

On calcule les dérivées : $u'(x) = 5$ $v'(x) = 2$

Donc : $f'(x) = \dfrac{5 \times (2x+1) - 2 \times (5x-4)}{(2x+1)^2} = \dfrac{\cancel{10x} + 5 - \cancel{10x} + 8}{(2x+1)^2} = \boxed{\dfrac{13}{(2x+1)^2}}$

6.4 Dérivée et variations d'une fonction

Propriété 6.4

Pour une fonction f dérivable sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
la dérivée est positive sur $[a\ ;\ b]$,
si et seulement si
cette **fonction** est **croissante** sur $[a\ ;\ b]$.

x	a		b
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

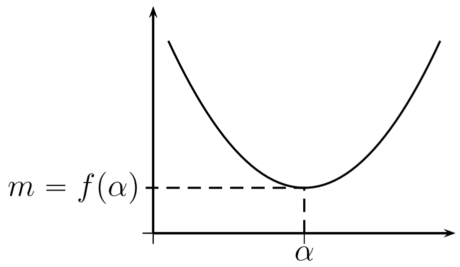
Propriété 6.5

Pour une fonction f dérivable sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
la dérivée est négative sur $[a\ ;\ b]$,
si et seulement si
cette **fonction** est **décroissante** sur $[a\ ;\ b]$.

x	a		b
Signe de $f'(x)$		$-$	
Variations de f	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$

Propriété 6.6 (Minimum d'une fonction sur un intervalle)

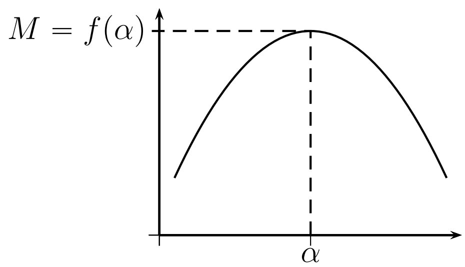
- Le minimum m d'une fonction f sur un intervalle est la plus petite valeur de $f(x)$ sur cet intervalle.
- Dire que le minimum m de f est atteint en $x = \alpha$ signifie que $m = f(\alpha)$.
- Lorsqu'une fonction dérivable a un minimum en α la dérivée s'annule : $f'(\alpha) = 0$.



x	a		α		b
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(a)$	$\searrow$	$m = f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(b)$

Propriété 6.7 (Maximum d'une fonction sur un intervalle)

- Le maximum M d'une fonction f sur un intervalle I est la plus grande valeur de $f(x)$ sur cet intervalle.
- Dire que le maximum de f sur I est M et qu'il est atteint en $x = \alpha$ signifie que $M = f(\alpha)$.
- Lorsqu'une fonction dérivable a un maximum en α la dérivée s'annule : $f'(\alpha) = 0$.



x	a		α		b
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(a)$	$\nearrow$	$M = f(\alpha)$	$\searrow$	$f(b)$

Exemple 6.10

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 + 3x + 7$ sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Étudier le signe de la dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer le minimum de f et la valeur de x où il est atteint.

1. **Dérivée de f.** $f'(x) = 2x + 3$
2. **Signe de la dérivée**

   $f'(x) = 0 \iff 2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -\dfrac{3}{2} = -1,5$

   $a = 2$ le signe de $-a$ est $-$ le signe de a est $+$

x	-4		$-1,5$		3
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. Tableau de variations.

Valeurs remarquables : dans la ligne des valeurs de x, on place les bornes de l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$ et le nombre $-1,5$ qui annule la dérivée, puis on calcule les images de ces trois nombres :
$f(-4) = 11 \quad f(-1,5) = 4,75 \quad f(3) = 25.$

x	-4		$-1,5$		3
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	11	$\searrow$	$4,75$	$\nearrow$	25

4. Minimum de f et valeur de x où il est atteint.
Le minimum est $f(-1,5) = 4,75$ et il est atteint en $x = -1,5$.

Exemple 6.11

La fonction f est définie par $f(x) = x^3 + 4,5x^2 - 12x - 20$ sur l'intervalle $[-6\ ;\ 3]$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Étudier le signe de la dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer le minimum de f et la valeur de x où il est atteint.
5. Déterminer le maximum de f et la valeur de x où il est atteint.

1. Dérivée de f. $f'(x) = 3x^2 + 4,5 \times 2x - 12 \times 1 = 3x^2 + 9x - 12$

2. Signe de la dérivée
$f'(x) = 3x^2 + 9x - 12 \qquad a = 3 \quad b = 9 \quad c = -12$
$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{225} = 15 \qquad \Delta > 0$
L'équation $3x^2 + 9x - 12 = 0$ a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-9-15}{2\times 3} = \dfrac{-24}{6} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-9+15}{2\times 3} = \dfrac{6}{6} = 1$
$a = 3 \qquad$ le signe de $-a$ est $-$ $\qquad$ le signe de a est $+$

x	-6		-4		1		3
Signe de $3x^2 + 9x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Tableau de variations.
Valeurs remarquables : dans la ligne des valeurs de x, on place les bornes de l'intervalle $[-6\ ;\ 3]$ et les valeurs qui annulent la dérivée (x_1 et x_2), puis on calcule les images de ces quatre nombres.
$f(-6) = -2 \qquad f(-4) = 36 \qquad f(1) = -26,5 \qquad f(3) = 11,5$

x	-6		-4		1		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-2	$\nearrow$	36	$\searrow$	$-26,5$	$\nearrow$	$11,5$

4. Minimum de f et valeur de x où il est atteint.
Le minimum est $f(1) = -26,5$ et il est atteint en $x = 1$.

5. Maximum de f et valeur de x où il est atteint.
Le minimum est $f(-4) = 36$ et il est atteint en $x = -4$.